第一部分　代数模型

专题一　实数

模型 1　实数简便计算

1.【解】(1) 原式 $=\left[(-1)+\left(-\frac{5}{6}\right)\right]+\left[(-2)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left(9+\frac{3}{4}\right)+\left[(-3)+\left(-\frac{1}{12}\right)\right]=\left[(-1)+(-2)+9+(-3)\right]+\left[\left(-\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{12}\right)\right]=3+\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{13}{6}$.

(2) 原式 $=\left[(-2\,023)+\left(-\frac{5}{6}\right)\right]+\left[(-2\,022)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[(-1)+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(-\frac{5}{6}\right)+4\,045+\frac{3}{4}=(-2\,023-2\,022-1+4\,045)+\left(-\frac{5}{6}-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{5}{6}+\frac{3}{4}\right)=-1+\frac{3}{4}-\frac{17}{6}=-3\frac{1}{12}$.

解题有法

先将带分数拆分成整数与分数的和的形式，再把整数和分数分别组合计算.

2.【解】(1) 原式 $=\left[-3+\left(-\frac{3}{10}\right)\right]+\left[-1+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]+\left(2+\frac{3}{5}\right)+\left(2+\frac{1}{2}\right)$

$=\left[(-3)+(-1)+2+2\right]+\left[\left(-\frac{3}{10}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right]$

$=0+\frac{3}{10}$

$=\frac{3}{10}$.

故答案为 $\left[\left(-\frac{3}{10}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{5}+\frac{1}{2}\right]$，$\frac{3}{10}$，$\frac{3}{10}$.

(2) $\left(-2\,024\frac{2}{3}\right)+2\,023\frac{3}{4}+\left(-2\,022\frac{5}{6}\right)+2\,021\frac{1}{2}$

$=\left[(-2\,024)+2\,023+(-2\,022)+2\,021\right]+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+\frac{3}{4}+\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{2}\right]$

$=(-2)+\left(-\frac{1}{4}\right)$

$=-\frac{9}{4}$.

3.【解】明明的解法从第二步开始出现错误.

原式 $=\left(-4\frac{2}{3}\right)+\left(-1\frac{5}{6}\right)+18\frac{1}{2}+\left(-13\frac{3}{4}\right)$

$=\left[(-4)+\left(-\frac{2}{3}\right)\right]+\left[(-1)+\left(-\frac{5}{6}\right)\right]+\left(18+\frac{1}{2}\right)+\left[(-13)+\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

$=\left[(-4)+(-1)+18+(-13)\right]+\left[\left(-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}\right)+\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{4}\right)\right]$

$=0+\left(-\frac{7}{4}\right)$

$=-\frac{7}{4}$.

4.【解】令 $S=25+25^2+25^3+\cdots+25^n$，①

则 $25S=25^2+25^3+\cdots+25^{n+1}$，②

②−①得 $25S-S=25^{n+1}-25$，

$\therefore S=\frac{25^{n+1}-25}{24}$.

$\therefore 25+25^2+25^3+\cdots+25^n$ 的值为 $\frac{25^{n+1}-25}{24}$.

解题有法

等号两边乘相同底数后，再与原式错位相减，进而化简计算.

5.【解】令 $S=\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$，则 $-\frac{1}{2}S=\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$，两式相减，得

$-\frac{3}{2}S=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(-\frac{1}{2}\right)$，所以 $S=\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-1}{3}$，故 $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$ 的值为 $\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-1}{3}$.

6.【解】(1)令 $S=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}$，①

则有 $4S=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}$，②

②−①得 $3S=1-\frac{1}{4^n}$，

则 $S=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times4^n}$，

$\therefore\ \frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3\times4^n}$.

(2)原式 $=1-\frac{1}{4}+1-\frac{1}{4^2}+1-\frac{1}{4^3}+\cdots+1-\frac{1}{4^n}=1+1+\cdots+1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\cdots+\frac{1}{4^n}\right)=n-\frac{1}{3}+\frac{1}{3\times4^n}$.

关键点拨

(2)先拆项再重组最后利用(1)的结果计算.

7.【解】(1)原式 $=\frac{1}{3}\times12-\frac{1}{6}\times12+\frac{1}{4}\times12$

$=4-2+3$

$=5$.

(2)$\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{12}+\frac{3}{8}\right)\div\left(-\frac{1}{24}\right)$

$=\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{12}+\frac{3}{8}\right)\times(-24)$

$=\frac{1}{4}\times(-24)-\frac{5}{12}\times(-24)+\frac{3}{8}\times(-24)$

$=-6+10-9$

$=-5$.

故原式 $=-\frac{1}{5}$.

8.【解】除法没有分配律，故解法一错误. 故答案为一.

$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\div\frac{1}{12}$

$=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{12}\right)\times12$

$=\frac{1}{3}\times12-\frac{1}{4}\times12+\frac{1}{12}\times12$

$=2$.

故原式 $=\frac{1}{2}$.

9.【解】(1)根据倒数的定义可知 $\frac{1}{36}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)$ 与 $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)\div\frac{1}{36}$ 互为倒数.

(2)先计算后一部分比较简便.

$\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)\div\frac{1}{36}$

$=\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)\times36$

$=9+3-14-1$

$=-3$.

(3)另一部分的结果为 $-\frac{1}{3}$. 因为前后两部分互为倒数，所以 $\frac{1}{36}\div\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{12}-\frac{7}{18}-\frac{1}{36}\right)=-\frac{1}{3}$.

(4)根据以上分析，可知原式 $=-\frac{1}{3}+(-3)=-3\frac{1}{3}$.

10.【解】(1)$\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{2\,020\times2\,021}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2\,020}-\frac{1}{2\,021}$

$=1-\frac{1}{2\,021}=\frac{2\,020}{2\,021}$.

(2)$1-\frac{5}{6}+\frac{7}{12}-\frac{9}{20}+\frac{11}{30}-\frac{13}{42}+\frac{15}{56}-\frac{17}{72}+\frac{19}{90}$

$=1-\frac{2+3}{2\times3}+\frac{3+4}{3\times4}-\frac{4+5}{4\times5}+\frac{5+6}{5\times6}-\frac{6+7}{6\times7}+\frac{7+8}{7\times8}-\frac{8+9}{8\times9}+\frac{9+10}{9\times10}$

$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{4}+\cdots-\frac{1}{9}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$

$=\frac{3}{5}$.

关键点拨

(1)分母为两数之积,分子为两数之差的分裂成两个分数相减(或整数与分数相减);(2)分母为两数之积,分子为两数之和的分裂成两个分数相加.

11.【解】$13\frac{1}{6}+15\frac{1}{12}+17\frac{1}{20}+19\frac{1}{30}+21\frac{1}{42}+23\frac{1}{56}+25\frac{1}{72}+27\frac{1}{90}$

$=\left(13+\frac{1}{6}\right)+\left(15+\frac{1}{12}\right)+\left(17+\frac{1}{20}\right)+\left(19+\frac{1}{30}\right)+\left(21+\frac{1}{42}\right)+\left(23+\frac{1}{56}\right)+\left(25+\frac{1}{72}\right)+\left(27+\frac{1}{90}\right)$

$=(13+15+17+19+21+23+25+27)+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}\right)$ 拆项法

$=160+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}\right)$ 裂项法

$=160+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{10}\right)$

$=160\frac{2}{5}$.

12.【解】原式$=\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{1\,008\times1\,009}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{1\,008}-\frac{1}{1\,009}\right)$

$=\frac{1}{4}\times\frac{1\,008}{1\,009}$

$=\frac{252}{1\,009}$.

13.【解】$\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+\frac{1}{1+2+3+4+5}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+2\,022}$

$=\frac{2}{2\times3}+\frac{2}{3\times4}+\frac{2}{4\times5}+\frac{2}{5\times6}+\cdots+\frac{2}{2\,022\times2\,023}$

$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{2\,022}-\frac{1}{2\,023}\right)$

$=2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2\,023}\right)$

$=\frac{2\,021}{2\,023}$.

思路分析

分子分母同时乘2,将分母写成两个数之积的形式,提取系数2后每一项分裂成两个分数之差,最后化简计算.

14.【解】(1)$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{5\times6\times7}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{2\times3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\times3}-\frac{1}{3\times4}\right)+\cdots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5\times6}-\frac{1}{6\times7}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\times2}-\frac{1}{6\times7}\right)=\frac{5}{21}$.

故答案为$\frac{5}{21}$.

(2)由题意可得$n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)]$.故答案为$\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)]$.

(3)$\because A=1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}\times(1\times2\times3-0\times1\times2)+\frac{1}{3}\times(2\times3\times4-1\times2\times3)+\frac{1}{3}\times(3\times4\times5-2\times3\times4)+\cdots+\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-n(n-1)(n+1)]=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$,

$B=\frac{1}{n}\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}$,

$\therefore A\cdot B=\frac{1}{3}n(n+2)$,

$\therefore A\cdot B-C=\frac{1}{3}(n^2-2n)=\frac{1}{3}n(n-2)$.

∵ n 为正整数，

∴ 当 $n=1$ 时，$A\cdot B<C$；

当 $n=2$ 时，$A\cdot B=C$；

当 $n>2$ 时，$A\cdot B>C$.

模型 2　数轴上的动点探究

1.【解】(1)由题图(1)可得 $AC=4-(-5)=9$，由题图(2)可得 $AC=5.4$ cm，

∴ $\dfrac{5.4}{9}=\dfrac{1.8}{b+5}$，

∴ $b=-2$，

即数轴上点 B 所对应的数 b 为 -2.

故答案为 -2.

(2)设点 P 所表示的数为 a.

①当 $-5\leqslant a\leqslant -2$ 时，$PA=2PB$，

则 $a+5=2(-2-a)$，

解得 $a=-3$；

②当 $a>-2$ 时，$PA=2PB$，

则 $a+5=2(a+2)$，

解得 $a=1$.

综上，点 P 所表示的数为 -3 或 1.

关键点拨

数轴上两点之间的距离＝右边的点表示的数－左边的点表示的数.

2.【解】(1)∵ $|a-6|+(c+2)^2=0$，$AB=3$，

∴ $a=6$，$b=3$，$c=-2$.

故答案为 6，3，-2.

(2)∵ 将数轴对折，使得对折后点 A 与点 C 重合，∴ 折点表示的数为 $\dfrac{6+(-2)}{2}=2$.

∵ 点 B 与点 P 也重合，

∴ $\dfrac{3+x}{2}=2$，

∴ $x=1$.

(3)∵ 将数轴从点 P 处对折，使得对折后 $PB=2AC$，

∴ 分情况讨论点 P 所在的位置：

①当点 P 在点 A 右侧时，对折后 $AC=6+|-2|=8$，

∴ $PB=16=x-3$，

解得 $x=19$；

②当点 P 在线段 AB 的中点时，对折后 $AC=5$，

∴ $PB=10=x-3$，

解得 $x=13$，不符合题意，舍去；

③当点 P 在线段 AB 上(除中点)时，对折后 $AC=2x-6+2=2x-4$，

∴ $PB=4x-8=x-3$，

解得 $x=\dfrac{5}{3}$，不符合题意，舍去.

综上，点 P 所表示的数 x 为 19.

解题有法

折点表示的数为重合的两点表示的两数和的一半.

3.【解】(1)是. ∵ $PA=3$，$PB=1$，$PC=4$，

∴ $PA+PB=PC$，

∴ 点 P 是点 A，B，C 的“和谐点”.

(2)以 A 为原点建立数轴，则 A 表示 0，B 表示 2，C 表示 5. 设点 P 表示的数为 x.

①P 在 A 左边时，令 $PA+PB=PC$，

即 $(0-x)+(2-x)=(5-x)$，解得 $x=-3$，此时 $AP=3$.

②P 在 AB 之间时，令 $PA+PB=PC$，

即 $(x-0)+(2-x)=(5-x)$，解得 $x=3$(舍去).

③P 在 BC 之间时，令 $PA+PB=PC$，

即 $(x-0)+(x-2)=(5-x)$，

解得 $x=\dfrac{7}{3}$，

此时 $AP=\dfrac{7}{3}$.

④P 在 C 右侧时，不可能有 $PA+PB=PC$.

故答案为 3 或 $\dfrac{7}{3}$.

(3)设 $AP=m$，则 $PB=m+2$，$PC=m+5$.

∵ $PA+PB=PC$，

∴ $m+m+2=m+5$，

解得 $m=3$，

∴ 点 P 表示的数为 $a-3$.

4. $\dfrac{7}{2}$ 或 $\dfrac{7}{6}$　**【解析】**根据题意得 P 表示的数是 $-5+4t$，Q 表示的数是 $2+2t$，动点 Q 到点 A 的距离是 $2t$. ①当点 P 在点 A 右侧时，$PA=-5+4t-2=4t-$

7，则 $2t=4t-7$，解得 $t=\frac{7}{2}$. ②当点 P 在点 A 左侧时，$PA=2-(-5+4t)=7-4t$，则 $2t=7-4t$，解得 $t=\frac{7}{6}$.

解题有法

动点表示的数=起始位置表示的数+向右移动速度×时间或起始位置表示的数−向左移动速度×时间.

5.【解】(1)由题意可知，动点 P 在 AO，BC，DE 段的速度均为每秒 4 个单位长度，在 OB 段的速度为每秒 2 个单位长度，在 CD 段的速度为每秒 8 个单位长度，$AO=OB=BC=CD=8$，$DE=4$，

∴ 动点 P 从点 A 运动至点 E 需要的时间为 $8\div4+8\div2+8\div4+8\div8+4\div4=2+4+2+1+1=10$(秒).

由题意可知，动点 Q 在 DE 段的速度为每秒 2 个单位长度，在 CD 段的速度为每秒 1 个单位长度，

∴ 动点 Q 从点 E 运动到点 D 需要 $4\div2=2$(秒)，从点 D 运动到点 C 需要 $8\div1=8$(秒)，$2+8=10$(秒)，

∴ 此时点 Q 对应的点是点 C.

故答案为 10，点 C.

(2)由(1)可知，P，Q 两点在 M 处相遇时，点 M 在 CD 段.

动点 P 由点 A 到点 C 用时为 $8\div4+8\div2+8\div4=8$(秒)，

动点 Q 从点 E 到点 D 用时为 $4\div2=2$(秒).

∵ $(8-2)\times\frac{1}{2}\times2=6$，

∴ 当动点 P 到达点 C 时，点 Q 与点 C 的距离为 $8-6=2$.

∵ $\frac{2}{8+1}=\frac{2}{9}$，

∴ 此时 P，Q 两点再运动 $\frac{2}{9}$ 秒在点 M 处相遇，

∴ 相遇点 M 所对应的数为 $16+\frac{2}{9}\times8=17\frac{7}{9}$.

(3)①当点 P 在 OA 段时，点 Q 在 DE 段，此时 P，B 在数轴上相距的长度大于 8，Q，D 在数轴上相距的长度小于 4，不符合题意；

②当点 P 在 OB 段时，点 Q 在 CD 段，

则 P，B 在数轴上相距的长度为 $8-(t-2)\times2=12-2t$，Q，D 在数轴上相距的长度为 $(t-2)\times1=t-2$，∴ $12-2t=t-2$，

解得 $t=\frac{14}{3}$；

③当点 P 在 BC 段时，点 Q 在 CD 段，

P，B 在数轴上相距的长度为 $(t-6)\times4=4t-24$，Q，D 在数轴上相距的长度为 $(t-2)\times1=t-2$，

∴ $4t-24=t-2$，

解得 $t=\frac{22}{3}$；

④当点 P 在 CD 段或 DE 段时，P，B 在数轴上相距的长度大于 8，Q，D 在数轴上相距的长度不超过 8，不符合题意.

综上所述，当 $t=\frac{14}{3}$ 或 $\frac{22}{3}$ 时，P，B 两点在数轴上相距的长度与 Q，D 两点在数轴上相距的长度相等.

6.【解】(1)∵ 木棒 m 的端点 A，B 间的距离为 4，点 B 到原点的距离为 1，

∴ 点 A 到原点的距离为 5.

∵ 点 A，B 在原点的左侧，

∴ $a=-5$，$b=-1$.

(2)①由(1)知平移前木棒 m 两端点对应的数分别为 −5 和 −1，则平移前木棒 m 的中点表示的数为 $[(-5)+(-1)]\div2=-3$，此时中点到原点的距离为 3. 若在移动过程中原点 O 恰好是木棒 m 的中点，则 $4t=3$，

解得 $t=\frac{3}{4}$.

②当木棒 m，n 重叠部分的长为 3 个单位长度时，分以下两种情况：

当 m 的左端点在 n 的左端点左边时，

得 $-1+4t-(3+3t)=3$，

解得 $t=7$；

当 m 的右端点在 n 的右端点右边时，

得 $8+3t-(-5+4t)=3$，

解得 $t=10$.

综上所述，当木棒 m，n 重叠部分的长为 3 个单位长度时，t 的值为 7 或 10.

专题二　代数式

模型 3　整式化简与求值

1. $2c-2a-2b$　【解析】∵ $|a|=-a,\frac{|b|}{b}=-1$，即 $|b|=-b,|c|=c$，∴ $a\leqslant 0,b<0,c\geqslant 0$，∴ $a+b<0,a-c\leqslant 0,b-c<0$，∴ 原式 $=-a-b+c-a+c-b=2c-2a-2b$. 故答案为 $2c-2a-2b$.

2. A　【解析】∵ a,b,c 是三角形的三边长，∴ $a+b-c>0,c-a-b<0$，∴ 原式 $=a+b-c+c-a-b=0$，故选 A.

3. A　【解析】∵ a,b,c 都为整数，∴ $a-b,b-c$ 都为整数.

∵ $|a-b|^{2\,023}+|b-c|^{2\,024}=1$，

∴ $\begin{cases}|a-b|=0,\\|b-c|=1\end{cases}$ 或 $\begin{cases}|a-b|=1,\\|b-c|=0,\end{cases}$

∴ $a-b=0,|b-c|=1$ 或 $|a-b|=1,b-c=0$，

即 $a=b,|b-c|=1$ 或 $|a-b|=1,b=c$.

当 $a=b,|b-c|=1$ 时，

$|a-b|+|b-c|-|a-c|=0+1-|b-c|=0+1-1=0$；

当 $|a-b|=1,b=c$ 时，

$|a-b|+|b-c|-|a-c|=1+0-|a-b|=1+0-1=0$.

综上，$|a-b|+|b-c|-|a-c|$ 的值为 0，故选 A.

关键点拨

根据绝对值的非负性讨论 $|a-b|$ 和 $|b-c|$ 的值的情况，再进行化简.

4. D　【解析】∵ $\frac{|abc|}{abc}=-1$，∴ $abc<0$. 当 a,b,c 中有两个数大于 0 时，原式 $=1+1-1=1$；当 a,b,c 均小于 0 时，原式 $=-1-1-1=-3$. 故选 D.

5. A　【解析】∵ $abc<0$，∴ a,b,c 中有一个负数和两个正数或三个都为负数. ∵ $a+b+c=0$，∴ a,b,c 不可能三个都为负数，只能是一个负数和两个正数，$b+c=-a,a+c=-b,a+b=-c$. 当 a,b 为正数，c 为负数时，$x=\frac{|b+c|}{a}+\frac{2|a+c|}{b}-\frac{3|a+b|}{c}=\frac{|-a|}{a}+\frac{2|-b|}{b}-\frac{3|-c|}{c}=\frac{a}{a}+\frac{2b}{b}-\frac{-3c}{c}=1+2+3=6$；

当 a,c 为正数，b 为负数时，$x=\frac{|b+c|}{a}+\frac{2|a+c|}{b}-\frac{3|a+b|}{c}=\frac{|-a|}{a}+\frac{2|-b|}{b}-\frac{3|-c|}{c}=\frac{a}{a}+\frac{-2b}{b}-\frac{3c}{c}=1-2-3=-4$；当 b,c 为正数，a 为负数时，$x=\frac{|b+c|}{a}+\frac{2|a+c|}{b}-\frac{3|a+b|}{c}=\frac{|-a|}{a}+\frac{2|-b|}{b}-\frac{3|-c|}{c}=\frac{-a}{a}+\frac{2b}{b}-\frac{3c}{c}=-1+2-3=-2$. 则 x 的最大值与最小值的乘积为 $6\times(-4)=-24$，故选 A.

6. $2a-3b$　【解析】由数轴可知 $a<0<b,|a|>|b|$，

∴ $a+b<0,b-a>0$，

∴ $|a+b|-2|b-a|-|a|=-a-b-2(b-a)+a=-a-b-2b+2a+a=2a-3b$.

7. $-2a+2b$　【解析】∵ $ab>0,a+b>0$，∴ $a>0,b>0$. ∵ $ac<0$，∴ $c<0$. ∵ $|a|<|b|<|c|$，∴ $a+c<0,a-b<0,c+b<0$，∴ $|a+c|+|a-b|-|c+b|=-a-c-a+b+c+b=-2a+2b$. 故答案为 $-2a+2b$.

8. 【解】(1) 当 $mn>0$ 时，$\frac{|m|}{m}$ 与 $\frac{|n|}{n}$ 的值同时为 1 或同时为 -1，

则 $\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}=0$. 故答案为 0.

(2) ∵ $mnt<0$，∴ m,n,t 全为负数或 m,n,t 中有两个正数和一个负数.

①当 m,n,t 全为负数时，

$\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}-\frac{|t|}{t}=(-1)-(-1)-(-1)=1$.

②当 m,n,t 中有两个正数和一个负数时，

(Ⅰ) 当 $m>0,n>0,t<0$ 时，

$\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}-\frac{|t|}{t}=1-1-(-1)=1$；

(Ⅱ) 当 $m>0,n<0,t>0$ 时，

$\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}-\frac{|t|}{t}=1-(-1)-1=1$；

(Ⅲ) 当 $m<0,n>0,t>0$ 时，

$\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}-\frac{|t|}{t}=(-1)-1-1=-3$.

综上所述，$\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}-\frac{|t|}{t}$的值为 1 或−3.

(3)∵ $m+n+t=0$，

∴ $n+t=-m$，$m+t=-n$，$m+n=-t$，

∴ $\frac{|m|}{n+t}-\frac{|n|}{m+t}-\frac{|t|}{m+n}=\frac{|m|}{-m}-\frac{|n|}{-n}-\frac{|t|}{-t}=-\left(\frac{|m|}{m}-\frac{|n|}{n}-\frac{|t|}{t}\right)$.

又∵ $mnt<0$，

∴ m，n，t 中有两个正数和一个负数.

由(2)可知$\frac{|m|}{n+t}-\frac{|n|}{m+t}-\frac{|t|}{m+n}$的值为−1 或 3.

9. 【解】(1)由题意得 $x=3$ 或−1. 故答案为 3 或−1.

(2)当代数式$|x+1|+|x-2|$取最小值时，表示在数轴上表示数 x 的点到表示数−1 和 2 的点的距离之和最小，

∴ $-1\leqslant x\leqslant 2$.

故答案为$-1\leqslant x\leqslant 2$.

(3)当 $x<-1$ 时，原式$=-x-1+2(x-1)=x-3<-4$；

当$-1\leqslant x\leqslant 1$ 时，原式$=x+1+2(x-1)=3x-1$，$-4\leqslant 3x-1\leqslant 2$；

当 $x>1$ 时，原式$=x+1-2(x-1)=-x+3<2$.

综上，$|x+1|-2|x-1|$的最大值为 2.

10. B 【解析】∵ $x^2+3x-5=0$，∴ $x^2+3x=5$，∴ $2x^2+6x-3=2(x^2+3x)-3=2\times5-3=7$. 故选 B.

11. 2 019 【解析】本题主要考查了方程的解、代数式求值. ∵ $x=3$ 是关于 x 的方程 $ax^2-bx=6$ 的解，∴ $a\cdot 3^2-3b=6$，即 $3a-b=2$，∴ $2\,023-6a+2b=2\,023-2(3a-b)=2\,023-2\times2=2\,023-4=2\,019$. 故答案为 2 019.

12. −24 【解析】$2xy(x^5y^2-3x^3y-4x)=2x^6y^3-6x^4y^2-8x^2y=2(x^2y)^3-6(x^2y)^2-8x^2y=2\times3^3-6\times3^2-8\times3=-24$.

13. −3 【解析】由题意得 $p+q+1=5$，

∴ $p+q=4$.

当 $x=-1$ 时，$px^3+qx+1=-p-q+1=-(p+q)+1=-4+1=-3$，

∴ 当 $x=-1$ 时，代数式 px^3+qx+1 的值为−3.

14. 9 【解析】$a^3b-2a^2b^2+ab^3=ab(a^2-2ab+b^2)=ab(a-b)^2$. 将 $a-b=3$，$ab=1$ 代入，得原式$=1\times3^2=9$. 故答案为 9.

15. 1 014 【解析】设 $2\,024-a=m$，$2\,023-a=n$，∴ $m-n=2\,024-a-(2\,023-a)=2\,024-a-2\,023+a=1$. 由题意得$(2\,023-a)^2+(2\,024-a)^2=2\,029$，∴ $(m-n)^2+2mn=2\,029$，∴ $1^2+2mn=2\,029$，∴ $mn=1\,014$，∴ $(2\,023-a)(2\,024-a)=mn=1\,014$. 故答案为 1 014.

16. 2 023 【解析】∵ $x^2-2x-1=0$，∴ $x^2-2x=1$，∴ $3x^3-10x^2+5x+2\,027=3x(x^2-2x)-4(x^2-2x)-3x+2\,027=3x\times1-4\times1-3x+2\,027=3x-4-3x+2\,027=2\,023$，故答案为 2 023.

17. 3 【解析】∵ 多项式 ax^2+2x-y^2-7 与 $x^2-bx-3y^2+1$ 的差不含 x 和 x^2 项，$(ax^2+2x-y^2-7)-(x^2-bx-3y^2+1)=ax^2+2x-y^2-7-x^2+bx+3y^2-1=(a-1)x^2+(-y^2+3y^2)+(2+b)x-8$，∴ $a-1=0$，$2+b=0$，解得 $a=1$，$b=-2$，故 $a-b=1-(-2)=1+2=3$. 故答案为 3.

解题有法

代数式化简后与某项无关或不含某项，则此项系数为 0.

18. A 【解析】∵ $S_1=a(n-a)+(n-b)(m-a)=an-a^2+mn-an-bm+ab=-a^2+mn-bm+ab$，$S_2=a(m-a)+(m-b)(n-a)=am-a^2+mn-am-bn+ab=-a^2+mn-bn+ab$，∴ $S_2-S_1=(-a^2+mn-bn+ab)-(-a^2+mn-bm+ab)=-bn+bm$，∴ S_2-S_1 的值与 a 的取值无关. 故选 A.

19. 【解】(1)∵ $8xy^{b-10}+(a+8)xy-1$ 是关于 x，y 的三次二项式，∴ $1+b-10=3$，$a+8=0$，解得 $a=-8$，$b=12$，故答案为−8，12.

(2)设点 C 对应的数为 x. ∵ $3AC=BC$，∴ 点 C 在点 B 的左边，∴ $3|-8-x|=12-x$，解得 $x=-18$ 或 $x=-3$，即点 C 对应的数为−3 或−18.

(3)t 秒后，M 对应的数为$-mt$，N 对应的数为 $12-3t$，∴ $MN=|-mt-12+3t|=|(3-m)t-12|$. ∵ P，Q 为 AM，BN 的中点，∴ P 点对应的数为$\frac{-8-mt}{2}$，Q 点对应的数为$\frac{24-3t}{2}$，∴ $PQ=$

$\left|\frac{-8-mt}{2}-\frac{24-3t}{2}\right|=\left|\frac{-32-mt+3t}{2}\right|=\left|\frac{(3-m)t-32}{2}\right|$.

$\because PQ+MN$ 的长度与 t 的取值无关，$\therefore m=3$，

$\therefore PQ+MN=16+12=28$.

思路分析

(1)根据多项式为关于 x,y 的三次二项式，得出 $1+b-10=3$，$a+8=0$，从而求出 a,b 的值. (2)设点 C 对应的数为 x. 由 $3AC=BC$ 判断出点 C 在点 B 的左边，于是有 $3|-8-x|=12-x$，即可求出 x 的值. (3)t 秒后，M 对应的数为 $-mt$，N 对应的数为 $12-3t$，计算出 MN 的长，再由 P,Q 为 AM,BN 的中点，表示出 P,Q 对应的数，则可计算出 PQ 的长，根据 $PQ+MN$ 的长度与 t 的取值无关，得 $m=3$，从而得解.

20.【解】(1)$y=kx^2-2kx+1=kx(x-2)+1$. 当 $x(x-2)=0$，即 $x=0$ 或 $x=2$ 时，无论 k 取什么值，都有 $y=1$，$\therefore$ 图象必经过定点(2,1)和(0,1)，故答案为(2,1)和(0,1).

(2)由 $y=mx^2+(1-2m)x+1-3m=mx^2+x-2mx+1-3m=mx^2-2mx-3m+x+1=m(x^2-2x-3)+x+1$.

当 $x^2-2x-3=0$ 时，解得 $x_1=3$，$x_2=-1$，

$\therefore$ 无论 m 取什么值，抛物线都会经过定点(3,4)，(-1,0).

$\because P$ 是非坐标轴上的点，

$\therefore$ 点 P 的坐标为(3,4).

模型 4　整式乘法的运用

1. B　【解析】$\because (2k+3)^2-4k^2=(2k+3)^2-(2k)^2=(2k+3+2k)\cdot(2k+3-2k)=3(4k+3)$，$k$ 为任意整数，$\therefore$ 其值总能被 3 整除. 故选 B.

2. A　【解析】$3^{2\,024}-4\times3^{2\,023}+10\times3^{2\,022}=3^{2\,022}\times(3^2-4\times3+10)=3^{2\,022}\times(9-12+10)=3^{2\,022}\times7$，$\therefore 3^{2\,024}-4\times3^{2\,023}+10\times3^{2\,022}$ 一定能被 7 整除，故选 A.

3. D　【解析】$4^8-1=(4^4+1)(4^4-1)=(4^4+1)(4^2+1)(4^2-1)=(4^4+1)(4^2+1)\times15$. 故选 D.

4. 2　【解析】$\because \frac{1}{2}(2n+1)^2-12.5=\frac{1}{2}[(2n+1)^2-25]=\frac{1}{2}(2n+6)(2n-4)=2(n+3)(n-2)$，

$\therefore \frac{1}{2}(2n+1)^2-12.5$ 一定能被 2 整除，故答案为 2.

5.【证明】$\overline{abcd}=1\,000a+100b+10c+d$

$=a(999+1)+b(99+1)+c(9+1)+d$

$=999a+a+99b+b+9c+c+d$

$=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$

$=3\times(333a+33b+3c)+(a+b+c+d)$.

$\because a,b,c,d$ 为整数，$\therefore 333a+33b+3c$ 是整数，

$\therefore 3\times(333a+33b+3c)$ 能被 3 整除，

$\therefore$ 若 $a+b+c+d$ 能被 3 整除，则 $\overline{abcd}$ 可以被 3 整除.

6.【解】原式 $=2^{64}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)=2^{64}\times\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^2}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)=2^{64}\times\left(1-\frac{1}{2^4}\right)\times\left(1+\frac{1}{2^4}\right)\times\cdots\times\left(1+\frac{1}{2^{32}}\right)=2^{64}\times\left(1-\frac{1}{2^{64}}\right)=2^{64}-1$.

$\because 2^n$(n 为正整数)的个位数字按 2,4,8,6 的顺序循环出现，且 $64\div4=16$，$\therefore 2^{64}-1$ 的个位数字是 $6-1=5$.

关键点拨

将 2^{63} 改写成 $2^{64}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)$，再连续用平方差公式计算即可.

7. D　【解析】$2^{2\,023}+2^{2\,022}+2^{2\,021}+2^{2\,020}+2^{2\,019}+\cdots+2+1=(2-1)\times(2^{2\,023}+2^{2\,022}+2^{2\,021}+2^{2\,020}+2^{2\,019}+\cdots+2+1)=2^{2\,024}-1$. $\because 2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，$2^6=64$，$\cdots$，$\therefore 2^n$(n 为正整数)的个位数字按 2,4,8,6 的顺序循环出现. $\because 2\,024\div4=506$，$\therefore 2^{2\,024}$ 的个位数字是 6，$\therefore 2^{2\,024}-1$ 的个位数字是 5，$\therefore 2^{2\,023}+2^{2\,022}+2^{2\,021}+2^{2\,020}+2^{2\,019}+\cdots+2+1$ 的个位数字是 5，故选 D.

8.【解】(1)根据“杨辉三角”的规律可得，$(a+b)^4$ 的各项系数依次为 1,4,6,4,1，

$\therefore (a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$，故答案为 $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

(2) $1+6\times6+15\times6^2+20\times6^3+15\times6^4+6\times6^5+6^6=1^6+6\times1^5\times6+15\times1^4\times6^2+20\times1^3\times6^3+15\times1^2\times6^4+6\times1\times6^5+6^6=(1+6)^6=7^6$.

$\because 7^n$(n 为正整数)的个位数字按 7,9,3,1 的顺序循环出现,$6\div4=1\cdots\cdots2$,

$\therefore 7^6$ 的个位数字是 9,则原式计算结果的个位数字是 9.

模型 5　特殊法因式分解

1. 【解】(1)设 $x^2+2x=y$.

原式 $=y(y+2)+1=y^2+2y+1=(y+1)^2=(x^2+2x+1)^2=(x+1)^4$.

(2)将 $x-y$ 看成一个整体,令 $x-y=B$,则原式 $=B^2-6B+9=(B-3)^2$.

再将 B 还原,则原式 $=(x-y-3)^2$.

2. 【解】令 $A=a^2+b^2$,则原式 $=A(A-4)-5=A^2-4A-5=(A-5)(A+1)$.

再将 A 还原,原式 $=(a^2+b^2-5)(a^2+b^2+1)$.

3. 【解】设 $x^2-2x=y$.

原式 $=(y-1)(y+3)+4$

$=y^2+2y+1$

$=(y+1)^2$

$=(x^2-2x+1)^2$

$=(x-1)^4$.

易错警示

注意要分解彻底.

4. 【解】(1) $m^2-2m+1-4n^2=(m-1)^2-4n^2=(m-1+2n)(m-1-2n)$.

(2) $x^2-y^2+x+y=(x^2-y^2)+(x+y)=(x+y)(x-y)+(x+y)=(x+y)(x-y+1)$.

(3) $2a+a^2-2b-2ab+b^2=(2a-2b)+(a^2-2ab+b^2)=2(a-b)+(a-b)^2=(a-b)(2+a-b)$.

5. 【解】$2x-ay+ax-2y=(2x-2y)+(ax-ay)=2(x-y)+a(x-y)=(x-y)(2+a)$.

6. 【解】原式 $=(m^2-2mn+n^2)-5(m-n)+6=(m-n)^2-5(m-n)+6=(m-n-2)(m-n-3)$.

7. 【解】原式 $=(4x^2+4xy+y^2)+(12x+6y)+8=(2x+y)^2+6(2x+y)+8=(2x+y+2)(2x+y+4)$.

8. 【解】(1) $x^3+2x^2-3=(x^3-x^2)+(3x^2-3)=x^2(x-1)+3(x^2-1)=(x-1)(x^2+3x+3)$. 将 $2x^2$ 拆分成 $-x^2+3x^2$

(2) $x^4-6x^2-7x-6=x^4-4x^2-2x^2-7x-6=x^2(x^2-4)-(2x^2+7x+6)=x^2(x+2)(x-2)-(x+2)(2x+3)=(x+2)(x^3-2x^2-2x-3)=(x+2)(x^3-2x^2-3x+x-3)=(x+2)[x(x^2-2x-3)+(x-3)]=(x+2)[x(x-3)(x+1)+(x-3)]=(x+2)(x-3)(x^2+x+1)$.

将 $-6x^2$ 拆分成 $-4x^2-2x^2$

将 $-2x$ 拆分成 $-3x+x$

9. 【解】$a^2+3b^2-4ab+6b-9=a^2+4b^2-4ab-b^2+6b-9=(a-2b)^2-(b-3)^2=(a-3b+3)(a-b-3)$.

将 $3b^2$ 拆分成 $4b^2-b^2$

10. 【解】$a^4-3a^2b^2+b^4=a^4-2a^2b^2+b^4-a^2b^2=(a^2-b^2)^2-a^2b^2=(a^2-b^2+ab)(a^2-b^2-ab)$.

将 $-3a^2b^2$ 拆分成 $-2a^2b^2-a^2b^2$

11. 【解】原式 $=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$. 将 x^2 拆分成 $2x^2-x^2$

12. 【解】(1) $x^3+x^2-2=(x^3-1)+(x^2-1)=(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)=(x-1)(x^2+2x+2)$.

(2)原式 $=x^3-1-7x+7=(x-1)(x^2+x+1)-7(x-1)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x-2)(x+3)$.

将 -2 拆分成 $-1-1$

将 6 拆分成 $-1+7$

13. 【解】$m^2-2mn+8n-16=(m^2-2mn+n^2)-(n^2-8n+16)=(m-n)^2-(n-4)^2=(m-n+n-4)(m-n-n+4)=(m-4)(m-2n+4)$.

添加 n^2-n^2

14. 【解】$x^2+2x-4y-4y^2=x^2+2x+1-1-4y-4y^2=(x^2+2x+1)-(1+4y+4y^2)=(x+1)^2-(1+2y)^2=[(x+1)+(1+2y)][(x+1)-(1+2y)]=(x+1+1+2y)(x+1-1-2y)=(x+2y+2)(x-2y)$.

添加 $1-1$

15. 【解】原式 $=x^2-2ax+a^2-a^2-b^2-2ab=(x-a)^2-(a+b)^2=(x+b)(x-2a-b)$. 添加 a^2-a^2

16.【解】原式$=a^4+a^2b^2+b^4+a^2b^2-a^2b^2$

添加 $a^2b^2-a^2b^2$

$=(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2$

$=(a^2+b^2)^2-a^2b^2$

$=(a^2+b^2+ab)(a^2+b^2-ab)$.

模型 6　分式化简与求值

1.【解】(1)原式$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+6}\right)+\cdots+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+96}-\frac{1}{x+99}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+99}\right)=\frac{33}{x^2+99x}$.

(2)原式$=-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+3}\right)+\left(\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+6}\right)-\left(\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+9}\right)=-\frac{1}{x}-\frac{1}{x+9}=-\frac{2x+9}{x^2+9x}$.

解题有法

分母为两式之积,分子为两式之差的分裂成两个分式相减;分母为两式之积,分子为两式之和的分裂成两个分式相加,注意是否需要提取系数.

2.【解】原式$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+5}+\cdots+\frac{1}{x+9}-\frac{1}{x+11}\right)\times(x+11)=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+11}\right)\times(x+11)=\frac{1}{2}\times\frac{12}{(x-1)(x+11)}\times(x+11)=\frac{6}{x-1}$.

∵ 式子的值为正整数,x 的值为整数,

∴ $x-1=1$ 或 2 或 3 或 6,则 x 的值为 2 或 3 或 4 或 7.

3.(1)$\frac{x+6}{x+7}-\frac{x+5}{x+6}=\frac{1}{x+6}-\frac{1}{x+7}$

(2)$\frac{x+n+1}{x+n+2}-\frac{x+n}{x+n+1}=\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+n+2}$

(3)【证明】$\frac{x+n+1}{x+n+2}-\frac{x+n}{x+n+1}=\frac{(x+n+2)-1}{x+n+2}-\frac{(x+n+1)-1}{x+n+1}=\left(1-\frac{1}{x+n+2}\right)-\left(1-\frac{1}{x+n+1}\right)=1-\frac{1}{x+n+2}-1+\frac{1}{x+n+1}=\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+n+2}$,

即等式$\frac{x+n+1}{x+n+2}-\frac{x+n}{x+n+1}=\frac{1}{x+n+1}-\frac{1}{x+n+2}$成立.

4.【解】原式$=\frac{x+3}{(x-3)(x+3)}-\frac{x-3}{(x+3)(x-3)}+\frac{6}{x^2+9}=\frac{x+3-x+3}{x^2-9}+\frac{6}{x^2+9}=\frac{6}{x^2-9}+\frac{6}{x^2+9}=\frac{6(x^2+9)+6(x^2-9)}{(x^2+9)(x^2-9)}=\frac{12x^2}{x^4-81}$.

5.【解】(1)$\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{a+b+a-b}{(a+b)(a-b)}+\frac{2a}{a^2+b^2}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{2a(a^2+b^2)+2a(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)(a^2+b^2)}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{4a^3}{a^4-b^4}+\frac{4a^3}{a^4+b^4}$

$=\frac{4a^3(a^4+b^4)+4a^3(a^4-b^4)}{(a^4-b^4)(a^4+b^4)}$

$=\frac{8a^7}{a^8-b^8}$.

(2)原式$=\frac{2}{1-a^2}+\frac{2}{1+a^2}+\frac{4}{1+a^4}-\frac{8}{1-a^8}=\frac{4}{1-a^4}+\frac{4}{1+a^4}-\frac{8}{1-a^8}=\frac{8}{1-a^8}-\frac{8}{1-a^8}=0$.

6.【解】原式$=\frac{3a-6b+3b}{(a-b)^2}=\frac{3(a-b)}{(a-b)^2}=\frac{3}{a-b}$.

∵ $a-b-1=0$,∴ $a-b=1$,∴ 原式$=\frac{3}{1}=3$.

7. $\frac{7}{2}$　**【解析】**原式$=\left(\frac{a^2}{a}-\frac{2a-1}{a}\right)\times\frac{a^2}{a-1}=\frac{(a-1)^2}{a}\times\frac{a^2}{a-1}=a(a-1)=a^2-a$. ∵ $2a^2-7=2a$,∴ $2a^2-2a=7$,∴ $a^2-a=\frac{7}{2}$,∴ 原式$=\frac{7}{2}$. 故答案为$\frac{7}{2}$.

8. 1　**【解析】**∵ $\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1$,∴ $\frac{b}{ab}+\frac{2a}{ab}=\frac{2a+b}{ab}=1$,

∴ $ab=2a+b$,∴ $\frac{ab-a}{a+b}=\frac{2a+b-a}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$. 故答案为 1.

9.【解】∵ $b=ab+a$,∴ $a-b=-ab$,

∴ $\frac{5b-7ab-5a}{a-ab-b}=\frac{-5(a-b)-7ab}{a-b-ab}=\frac{-5\times(-ab)-7ab}{-ab-ab}=$

$\frac{-2ab}{-2ab}=1$.

10.【解】(1)∵ $ab=1$,∴ $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}=\frac{ab}{ab+a^2}+\frac{ab}{ab+b^2}=\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$.

(2)∵ $abc=1$,

∴ $\frac{5a}{ab+a+1}+\frac{5b}{bc+b+1}+\frac{5c}{ca+c+1}$

$=\frac{5a}{ab+a+abc}+\frac{5b}{bc+b+1}+\frac{5c}{ca+c+1}$

$=\frac{5}{b+1+bc}+\frac{5b}{bc+b+1}+\frac{5c}{ca+c+1}$

$=\frac{5+5b}{bc+b+1}+\frac{5c}{ca+c+1}$

$=\frac{5+5b}{bc+b+1}+\frac{5c}{ca+c+abc}$

$=\frac{5+5b}{bc+b+1}+\frac{5}{a+1+ab}$

$=\frac{5+5b}{bc+b+1}+\frac{5abc}{a+abc+ab}$

$=\frac{5+5b}{bc+b+1}+\frac{5bc}{1+bc+b}$

$=\frac{5+5b+5bc}{bc+b+1}$

$=5$.

11. 1 **【解析】**联立 $\begin{cases}4x-3y-6z=0,\\x+2y-7z=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=3z,\\y=2z,\end{cases}$ 则 $\frac{2x^2+3y^2+6z^2}{x^2+5y^2+7z^2}=\frac{18z^2+12z^2+6z^2}{9z^2+20z^2+7z^2}=\frac{36z^2}{36z^2}=1$. 故答案为 1.

12. 2 或 3 **【解析】**设 $x+\frac{1}{x}=k$,则 $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=k^2-2$. ∵ $x^4-5x^3+8x^2-5x+1=0$,

∴ $\frac{x^4-5x^3+8x^2-5x+1}{x^2}=0$,∴ $x^2-5x+8-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}=0$,∴ $x^2+\frac{1}{x^2}-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+8=0$,∴ $k^2-2-5k+8=0$,整理得 $k^2-5k+6=0$,解得 $k_1=2$,$k_2=3$.

当 $k=2$,即 $x+\frac{1}{x}=2$ 时,去分母整理得 $x^2-2x+1=0$,此方程有解;

当 $k=3$,即 $x+\frac{1}{x}=3$ 时,去分母整理得 $x^2-3x+1=0$,此方程有解.

综上所述,$x+\frac{1}{x}=2$ 或 3. 故答案为 2 或 3.

13.【解】∵ $15a=10b=6c\neq0$,∴ $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}$.

设 $a=2k(k\neq0)$,则 $b=3k$,$c=5k$,

∴ 原式 $=\frac{2k\cdot3k+2\times3k\cdot5k-3\times2k\cdot5k}{(2k)^2+2\times(3k)^2-3\times(5k)^2}=\frac{6k^2+30k^2-30k^2}{4k^2+18k^2-75k^2}=-\frac{6k^2}{53k^2}=-\frac{6}{53}$.

14. $\frac{1}{8}$ **【解析】**把 $x+\frac{1}{x}=3$ 两边平方得 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=9$,即 $x^2+\frac{1}{x^2}=7$,则原式 $=\frac{1}{x^2+\frac{1}{x^2}+1}=\frac{1}{8}$. 故答案为 $\frac{1}{8}$.

15. 6 **【解析】**∵ $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{1}{5}$,∴ $\frac{x^2-x+1}{x}=5$,∴ $x-1+\frac{1}{x}=5$,∴ $x+\frac{1}{x}=6$.

16.【解】(1)∵ $\frac{xy}{x+y}=2$,$\frac{yz}{y+z}=\frac{4}{3}$,$\frac{zx}{z+x}=\frac{4}{3}$,

∴ $\frac{x+y}{xy}=\frac{1}{2}$,$\frac{y+z}{yz}=\frac{3}{4}$,$\frac{z+x}{zx}=\frac{3}{4}$,

∴ $\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$,$\frac{1}{z}+\frac{1}{y}=\frac{3}{4}$,$\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{3}{4}$,

∴ $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=2$,

∴ $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$,

∴ $\frac{yz+xz+xy}{xyz}=1$,

∴ $\frac{xyz}{xy+yz+zx}=1$,

∴ $\frac{xyz}{xy+yz+zx}$的值为 1.

(2)∵ $\frac{x}{x^2-x+1}=\frac{1}{7}$,∴ $\frac{x^2-x+1}{x}=7$,

$\therefore x-1+\frac{1}{x}=7$,

$\therefore x+\frac{1}{x}=8$,

$\therefore \frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+1=64-2+1=63$,

$\therefore \frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{63}$,$\therefore \frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值为$\frac{1}{63}$.

模型 7　二次根式化简

1.【解】$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}-\sqrt{3}}-\cdots-\frac{1}{\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}}$

$=\sqrt{2}+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{4}+\sqrt{3}-\cdots-\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,020}$

$=-\sqrt{2\,021}+1$.

2.【解】(1)$\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\sqrt{7}-\sqrt{5}$.

$\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}=\frac{2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})}=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$. 故答案为$\sqrt{7}-\sqrt{5}$,$\sqrt{n+2}-\sqrt{n}$.

(2)$\sqrt{21}-\sqrt{19}=\frac{(\sqrt{21}-\sqrt{19})(\sqrt{21}+\sqrt{19})}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}=\frac{2}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}$.

$\sqrt{19}-\sqrt{17}=\frac{(\sqrt{19}-\sqrt{17})(\sqrt{19}+\sqrt{17})}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}=\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}$.

$\because \frac{2}{\sqrt{21}+\sqrt{19}}<\frac{2}{\sqrt{19}+\sqrt{17}}$,

$\therefore \sqrt{21}-\sqrt{19}<\sqrt{19}-\sqrt{17}$. 故答案为<.

(3)原式$=\frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}+\cdots+\frac{\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,019}}{(\sqrt{2\,021}+\sqrt{2\,019})(\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,019})}$

$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1+\sqrt{5}-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{2\,021}-\sqrt{2\,019})$

$=\frac{\sqrt{2\,021}-1}{2}$.

3.【解】(1)$\sqrt{3}-\sqrt{2}<\sqrt{2}-\sqrt{1}$,$\sqrt{4}-\sqrt{3}<\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$\sqrt{5}-\sqrt{4}<\sqrt{4}-\sqrt{3}$. 故答案为<,<,<.

(2)猜想:$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$($n$ 为大于 1 的整数).

证明如下:$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$,$\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$.

又$\because n$ 为大于 1 的整数,$\therefore n+1>n-1$,

$\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$,

$\therefore \sqrt{n+1}-\sqrt{n}<\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

关键点拨

二次根式比较大小可以逆用分母有理化,化成分子相同的式子,再比较分母大小.

4. C　【解析】原式$=\sqrt{(\sqrt{9}+\sqrt{5})^2}-\sqrt{(\sqrt{9}-\sqrt{5})^2}=(3+\sqrt{5})-(3-\sqrt{5})=2\sqrt{5}$. 故选 C.

思路分析

$14\pm6\sqrt{5}=9\pm2\sqrt{45}+5=(3\pm\sqrt{5})^2$.

↓　↘

$9+5$　$2\sqrt{9\times5}$

5. $\sqrt{5}-\sqrt{2}$　**【解析】**$\sqrt{7-\sqrt{40}}=\sqrt{7-2\sqrt{10}}=\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

6. $2\sqrt{3}-2$　**【解析】**在 Rt△ABC 中,由勾股定理得 $AC^2+BC^2=AB^2$,所以$(\sqrt{3})^2+BC^2=(4-\sqrt{3})^2$,所以 $BC=\sqrt{16-8\sqrt{3}}=\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}=2\sqrt{3}-2$.

思路分析

$16-8\sqrt{3}=12-2\sqrt{48}+4=(2\sqrt{3}-2)^2$.

7.【解】$\because \sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$,$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$,$\sqrt{7-2\sqrt{12}}=\sqrt{4}-\sqrt{3}=2-\sqrt{3}$,$\cdots$,

$\sqrt{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$,

$\therefore$ 原式$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=$

$\sqrt{n+1}-1$.

8. 原式 $=\dfrac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{6}+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{12}+4}}+\dfrac{1}{\sqrt{4+2\sqrt{20}+5}}+\dfrac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{30}+6}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{(2+\sqrt{5})^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{(\sqrt{5}+\sqrt{6})^2}}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}+\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

$=\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+2-\sqrt{3}+\sqrt{5}-2+\sqrt{6}-\sqrt{5}=\sqrt{6}-1$.

9.【解】(1)$\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{8-4\sqrt{3}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$.

(2)$\because 21-\sqrt{80}=21-2\sqrt{20}=20-2\sqrt{20}+1=(\sqrt{20}-1)^2=(2\sqrt{5}-1)^2$,

$\therefore \sqrt{21-\sqrt{80}}=2\sqrt{5}-1$,$\therefore 7+\sqrt{21-\sqrt{80}}=7+2\sqrt{5}-1=6+2\sqrt{5}$.

$\because 6+2\sqrt{5}=5+2\sqrt{5}+1=(\sqrt{5}+1)^2$,

$\therefore \sqrt{6+2\sqrt{5}}=\sqrt{5}+1$.

$\therefore \sqrt{7+\sqrt{21-\sqrt{80}}}=\sqrt{5}+1$.

关键点拨

(1)改写成分数形式再配方;(2)逐层配方.

10.【解】(1)$\because \sqrt{2}>0$,$\therefore$ 点$(\sqrt{2},-\sqrt{3})$的“横负纵变点”为$(\sqrt{2},-\sqrt{3})$,故答案为$(\sqrt{2},-\sqrt{3})$.

(2)$\because 1\leqslant a\leqslant 2$,$\therefore 0\leqslant a-1\leqslant 1$,$\therefore 0\leqslant\sqrt{a-1}\leqslant 1$,$\therefore -1\leqslant\sqrt{a-1}-1\leqslant 0$.

$\because m=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{(\sqrt{a-1})^2+2\sqrt{a-1}\cdot 1+1^2}+\sqrt{(\sqrt{a-1})^2-2\sqrt{a-1}\cdot 1+1^2}\right)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(|\sqrt{a-1}+1|+|\sqrt{a-1}-1|)$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{a-1}+1+1-\sqrt{a-1})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\times 2=\sqrt{2}$,

$\therefore$ 点M的坐标为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$\because -\sqrt{2}<0$,

$\therefore$ 点M'的坐标为$(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

11.【解】(1)$\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{(2-\sqrt{2})-(2-\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}=\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}=1+\sqrt{3}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(2)$\dfrac{4-\sqrt{5}-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})-2(\sqrt{5}-2)}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}-2)}=\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}-\dfrac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\sqrt{5}+2-(\sqrt{5}+\sqrt{3})=2-\sqrt{3}$.

关键点拨

(1)分子添项改写后再分裂成两项相减;(2)分子拆项改写后再分裂成两项相减.

12.【解】设原式$=a$,则$\dfrac{1}{a}=\dfrac{\sqrt{5}+2\sqrt{3}-1}{\sqrt{15}-\sqrt{5}-\sqrt{3}+3}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{5}(\sqrt{3}-1)+\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{(\sqrt{5}+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}+\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$,

$\therefore$ 原式$=a=\dfrac{2}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

关键点拨

先对原式取倒数,再将分子拆项、分母分组因式分解后分裂成两项之和,最后再取倒数求原式,注意分母要有理化.

模型8　规律探究

1. D　【解析】观察这一列数:1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,…,得到规律:从第一个数开始,每三个数为一组,每组数中前两个数是奇数,第三个数为偶数.$\because 2\,024=674\times 3+2$,$\therefore$ 前2 024个数分成674组,余2个数,$\therefore$ 这一列数的前2 024个数中奇数有$674\times 2+2=1\,350$(个).故选D.

2. B 【解析】当 $x=-48$ 时，输出的结果为 $\frac{1}{2}\times(-48)=-24$；当 $x=-24$ 时，输出的结果为 $\frac{1}{2}\times(-24)=-12$；当 $x=-12$ 时，输出的结果为 $\frac{1}{2}\times(-12)=-6$；当 $x=-6$ 时，输出的结果为 $\frac{1}{2}\times(-6)=-3$；当 $x=-3$ 时，输出的结果为 $-3-3=-6$；当 $x=-6$ 时，输出的结果为 $\frac{1}{2}\times(-6)=-3$；…. 依次类推，从第 3 次输出的结果开始，以 $-6,-3$ 为一组进行循环. ∵ $(2\,022-2)\div2=1\,010$，∴ 第 2 022 次输出的结果为 -3. 故选 B.

关键点拨

根据程序框图确定循环节及循环周期是解题关键.

3. D 【解析】由题意知，长方形的长为 8，宽为 4. ①第一次相遇，物体甲与物体乙运动的时间为 $(2+4+4+2)\div(4+2)=2$（秒），∴ 第一次相遇地点的坐标是 $(-2,2)$；②从第一次相遇到第二次相遇，物体甲与物体乙运动的时间为 $(8\times2+4\times2)\div(4+2)=4$（秒），∴ 第二次相遇地点的坐标是 $(4,0)$；③第三次相遇地点的坐标是 $(-2,-2)$；④第四次相遇地点的坐标是 $(-2,2)$；…. 故每相遇三次为一个循环. ∵ $2\,023\div3=674\cdots\cdots1$，∴ 两个物体运动后的第 2 023 次相遇地点的坐标为 $(-2,2)$，故选 D.

4. OC 【解析】∵ 记为 1 的点在射线 OA 上，记为 2 的点在射线 OB 上，记为 3 的点在射线 OC 上，记为 4 的点在射线 OD 上，记为 5 的点在射线 OE 上，记为 6 的点在射线 OF 上，记为 7 的点在射线 OA 上，…，∴ 循环周期为 6. ∵ $2\,013\div6=335\cdots\cdots3$，∴ 所描的第 2 013 个点在射线 OC 上. 故答案为 OC.

5. $(-2^{2\,022},0)$ 【解析】∵ $A(-1,0)$，∴ $OA=1$. ∵ 每次旋转角度为 60°，∴ 6 次共旋转 360°. ∵ $2\,022\div6=337$，∴ 第 2 022 次旋转后，点 $A_{2\,022}$ 在 x 轴的负半轴上. ∵ 第一次旋转后，$OA_1=2$，第二次旋转后，$OA_2=2^2$，第三次旋转后，$OA_3=2^3$，…，∴ 第 2 022 次旋转后，$OA_{2\,022}=2^{2\,022}$，∴ 点 $A_{2\,022}$ 的坐标为 $(-2^{2\,022},0)$.

6. C 【解析】由所给图形可知，第①个图案中，菱形的个数为 $2=1\times3-1$；第②个图案中，菱形的个数为 $5=2\times3-1$；第③个图案中，菱形的个数为 $8=3\times3-1$；第④个图案中，菱形的个数为 $11=4\times3-1$；…，所以第 n 个图案中，菱形的个数为 $3n-1$，当 $n=8$ 时，$3n-1=23$，即第⑧个图案中，菱形的个数为 23. 故选 C.

7. $(2+2n)$ 【解析】第 1 个图案中有 4 个白色圆片，第 2 个图案中有 $4+2=6$（个）白色圆片，第 3 个图案中有 $4+2\times2=8$（个）白色圆片，第 4 个图案中有 $4+2\times3=10$（个）白色圆片，…，∴ 第 n 个图案中有 $4+2(n-1)=(2+2n)$ 个白色圆片. 故答案为 $(2+2n)$.

8. 5 050 【解析】∵ $a_1=1$，$a_2=3=1+2$，$a_3=6=1+2+3$，$a_4=10=1+2+3+4$，$a_5=15=1+2+3+4+5$，…，∴ $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$. 当 $n=100$ 时，$a_{100}=\frac{100\times(100+1)}{2}=5\,050$. 故答案为 5 050.

关键点拨

根据求和公式计算是解题的关键.

9. 8　2 022 【解析】因为数轴上点 A_0 表示的数为 -2，且点 A_1（不与 A_0 重合），A_0 到 1 对应的点的距离相等，所以 $1\times2-(-2)=4$，即点 A_1 表示的数为 4. 同理可得点 A_2 表示的数为 0，点 A_3 表示的数为 6，点 A_4 表示的数为 2，点 A_5 表示的数为 8，点 A_6 表示的数为 4，…，所以点 A_{2n}（n 为正整数）表示的数为 $2n-2$，点 A_{2n-1} 表示的数为 $2n+2$. 当 $n=1\,012$ 时，$2\times1\,012-2=2\,022$，即点 $A_{2\,024}$

表示的数为 2 022. 故答案为 8,2 022.

10. 3×4^n 【解析】操作 1 次后所得“雪花曲线”的边数为 12;操作 2 次后所得“雪花曲线”的边数为 48,即 12×4;操作 3 次后所得“雪花曲线”的边数为 192,即 12×4^2;操作 4 次后所得“雪花曲线”的边数为 768,即 12×4^3;…. ∴ 每增加 1 次操作,“雪花曲线”的边数是上一次的 4 倍,故操作 n 次后所得“雪花曲线”的边数是 $12\times4^{n-1}=3\times4^n$.

11. C 【解析】按一定规律排列的单项式:a,$\sqrt{2}a^2$,$\sqrt{3}a^3$,$\sqrt{4}a^4$,$\sqrt{5}a^5$,…,第 n 个单项式是 $\sqrt{n}a^n$,故选 C.

12. 10 【解析】第 1 个图案中三角形个数是 2;第 2 个图案中三角形个数是 $4=2\times2$;第 3 个图案中三角形个数是 $8=2\times2^2$;第 4 个图案中三角形个数是 $16=2\times2^3$;…. 则第 n 个图案中三角形个数是 $2\times2^{n-1}=2^n$. 当 $2^n=1\ 024$ 时,$n=10$,故答案为 10.

13. $(0,-2^{1\,013})$ 【解析】由题知,$P_1(-2,2)=(0,-4)$;$P_2(-2,2)=P_1(0,-4)=(-4,4)$;$P_3(-2,2)=P_1(-4,4)=(0,-8)$;$P_4(-2,2)=P_1(0,-8)=(-8,8)$;$P_5(-2,2)=P_1(-8,8)=(0,-16)$;$P_6(-2,2)=P_1(0,-16)=(-16,16)$;…. 依次类推,$P_{2n-1}(-2,2)=(0,-2^{n+1})$($n$ 为正整数). 令 $2n-1=2\ 023$,解得 $n=1\ 012$,所以 $P_{2\,023}(-2,2)=(0,-2^{1\,013})$. 故答案为 $(0,-2^{1\,013})$.

专题三　一元一次方程

模型 9　解复杂一元一次方程

1. 【解】(1)方程整理得 $\frac{10x}{7}-\frac{17-20x}{3}=1$,

去分母得 $30x-7(17-20x)=21$,

去括号得 $30x-119+140x=21$,

移项得 $30x+140x=21+119$,

合并同类项得 $170x=140$,

系数化为 1 得 $x=\frac{14}{17}$.

(2)方程整理得 $\frac{x-2}{2}-2x-2=3$,

去分母得 $x-2-4x-4=6$,

移项得 $x-4x=6+2+4$,

合并同类项得 $-3x=12$,

解得 $x=-4$.

(3)方程整理得 $10+10x-\frac{4x-5}{2}=\frac{1}{2}$,

去分母得 $20+20x-(4x-5)=1$,

去括号得 $20+20x-4x+5=1$,

移项得 $20x-4x=1-20-5$,

合并同类项得 $16x=-24$,

系数化为 1 得 $x=-\frac{3}{2}$.

关键点拨

将分数的分子、分母同时扩大相同的倍数,将分子、分母中的小数化为整数.

2. 【解】原方程可化为 $\frac{3x-5}{2}-\frac{12-5x}{3}=x$,

去分母得 $3(3x-5)-2(12-5x)=6x$,

去括号得 $9x-15-24+10x=6x$,

移项得 $9x+10x-6x=15+24$,

合并同类项得 $13x=39$,

系数化为 1 得 $x=3$.

3. 【解】原方程可化为 $2(4x-1.5)-5(5x-0.8)=10(1.2-x)$,

去括号得 $8x-3-25x+4=12-10x$,

移项得 $8x+10x-25x=12+3-4$,

合并同类项得 $-7x=11$,

解得 $x=-\frac{11}{7}$.

关键点拨

分母为 0.2 时，分子、分母同乘 5，分母为 0.5 时，分子、分母同乘 2，分母为 0.1 时，分子、分母同乘 10，可以使分母化为 1，简化计算.

4.【解】(1)移项得$\frac{x+3}{18}-\frac{x-1}{6}=\frac{x+2}{5}-\frac{x+4}{15}$，

通分得$\frac{x+3-3x+3}{18}=\frac{3x+6-x-4}{15}$，

即$\frac{-x+3}{9}=\frac{2x+2}{15}$，

去分母得$-5x+15=6x+6$，

移项、合并同类项得$11x=9$，

解得$x=\frac{9}{11}$.

(2)移项得$\frac{x-1}{5}-\frac{2-x}{10}=\frac{x-3}{3}-\frac{x+1}{9}$，

通分得$\frac{2x-2-2+x}{10}=\frac{3x-9-x-1}{9}$，即$\frac{3x-4}{10}=\frac{2x-10}{9}$，

去分母得$27x-36=20x-100$，

移项、合并同类项得$7x=-64$，

解得$x=-\frac{64}{7}$.

解题有法

把分母有倍数关系或有公因数的几项放在一组进行通分，化简后再去分母，进而解方程.

5.【解】移项得$\frac{12x-10}{21}-\frac{8x-9}{14}=\frac{2-x}{15}-\frac{7x-9}{20}$，

两边分别通分得$\frac{24x-20-24x+27}{42}=\frac{8-4x-21x+27}{60}$，

整理得$\frac{1}{6}=\frac{7-5x}{12}$，

去分母得$7-5x=2$，

解得$x=1$.

6.【解】(1)设$y=2x-3$，

则原方程可以化成$3y+\frac{1}{3}y=-5y+\frac{1}{2}y$，

移项、合并同类项得$\frac{47}{6}y=0$，

则$y=0$，

即$2x-3=0$，

解得$x=\frac{3}{2}$.

(2)设$y=2\,113-x$，

则原方程可化为$x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{672}y\right)=\frac{1}{2\,016}y+1$，

去括号得$x-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2\,016}y=\frac{1}{2\,016}y+1$，

移项、合并同类项得$\frac{2}{3}x=1$，

解得$x=\frac{3}{2}$.

7.【解】设$y=2x-1$，

则原方程可化为$\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}y=-\frac{1}{3}y+9$，

移项得$\frac{1}{2}y+\frac{1}{6}y+\frac{1}{3}y=9$，

解得$y=9$，

即$2x-1=9$，

解得$x=5$.

8.【解】(1)设$3x-1=y$.

原方程化为$2\,009y-314\times2y-2\,016\times673y=0$，

解得$y=0$，

即$3x-1=0$，

解得$x=\frac{1}{3}$.

(2)移项得$2(x+1)+5(x+1)=4(x-1)-3(x-1)$，

即$7(x+1)=x-1$，

去括号得$7x+7=x-1$，

移项、合并同类项得$6x=-8$，解得$x=-\frac{4}{3}$.

9.【解】∵$y-16-\frac{1}{2\,022}(y-23)=m+5$，

∴$(y-23)+2-\frac{1}{2\,022}(y-23)=m$.

∵关于x的方程$x+2-\frac{1}{2\,022}x=m$的解是$x=22$，∴$y-23=22$，

∴$y=45$.

关键点拨

将要解的一元一次方程变形为与题目相似的形式,把$(y-23)$看作一个整体.

模型 10　解特殊一元一次方程

1.【解】去分母,得$2(ax-2)=6-3(x+2b)$,

去括号,得$2ax-4=6-3x-6b$,

移项,得$2ax+3x=6-6b+4$,

合并同类项,得$(2a+3)x=10-6b$.

(1)根据题意得$2a+3\neq0$,解得$a\neq-\frac{3}{2}$,

$\therefore a\neq-\frac{3}{2}$,$b$为任意实数时,方程有唯一的解.

(2)根据题意得$2a+3=0$且$10-6b\neq0$,则$a=-\frac{3}{2}$且$b\neq\frac{5}{3}$时,方程无解.

(3)根据题意得$2a+3=0$且$10-6b=0$,则$a=-\frac{3}{2}$且$b=\frac{5}{3}$时,方程有无数解.

2.【解】方程整理得$(2a-4)x=a+3b$.

①当$2a-4\neq0$,即$a\neq2$,b为任意实数时,方程有唯一的解,解得$x=\frac{a+3b}{2a-4}$;

②当$2a-4=0$且$3b+a=0$,即$a=2$,$b=-\frac{2}{3}$时,方程有无数个解;

③当$2a-4=0$且$3b+a\neq0$,即$a=2$,$b\neq-\frac{2}{3}$时,方程无解.

关键点拨

含参方程根据方程有唯一解、有无数解、无解三种情况讨论.

3.【解】当$2x-1\geqslant0$,即$x\geqslant\frac{1}{2}$时,$2x-1=5$,

解得$x=3$.

当$2x-1<0$,即$x<\frac{1}{2}$时,$-2x+1=5$,解得$x=-2$.

$\therefore$原方程的解是$x=3$或$x=-2$.

4.【解】$\because|x+1|-x=-1$,

$\therefore|x+1|=-1+x$.

当$x+1\geqslant0$,即$x\geqslant-1$时,$x+1=-1+x$,方程无解;

当$x+1<0$,即$x<-1$时,$x+1=1-x$,

解得$x=0$(舍去),

$\therefore$该方程无解.

5.【解】当$x<-3$时,$-x-3+8=-3(x-1)$,解得$x=-1$(舍);当$-3\leqslant x\leqslant1$时,$x+3+8=-3(x-1)$,解得$x=-2$;当$x>1$时,$x+3+8=3(x-1)$,解得$x=7$.综上,方程的解为$x=-2$或$x=7$.

易错警示

运用零点讨论法解方程时,方程的解要根据对应的范围进行取舍.

6.【解】分三种情况:

①当$b+1<0$,即$b<-1$时,方程无解;

②当$b+1=0$,即$b=-1$时,$|x-2|=0$,解得$x=2$;

③当$b+1>0$,即$b>-1$时,当$x-2\geqslant0$,即$x\geqslant2$时,$x-2=b+1$,解得$x=b+3$;

当$x-2<0$,即$x<2$时,$x-2=-b-1$,解得$x=1-b$.

7.【解】[解决问题]

将方程变形为$\left|\frac{x-1}{2}\right|=2+x$.

根据绝对值的意义,得$\frac{x-1}{2}=2+x$或$\frac{x-1}{2}=-2-x$.

解这两个一元一次方程,得$x=-5$或$x=-1$.

经检验可知,原方程的解是$x=-1$.

故答案为$2+x$,$-2-x$,-5,-1,$x=-1$.

[学以致用]

根据绝对值的意义,得$2x+1=5x-6$或$2x+1=-5x+6$,

解这两个一元一次方程,得$x=\frac{7}{3}$或$x=\frac{5}{7}$,

经检验可知,原方程的解是$x=\frac{7}{3}$或$x=\frac{5}{7}$.

模型 11　一元一次方程的特殊解

1.【解】$3x=6k+x+4$,解得$x=3k+2$.

$\frac{2x-k}{3}=\frac{x-3k}{2}$,

$2(2x-k)=3(x-3k)$,

$4x-2k=3x-9k$,

$4x-3x=-9k+2k$, $x=-7k$.

由题意得 $3k+2=-7k$, $\therefore k=-\frac{1}{5}$.

思路分析

分别求出这两个方程的解,根据方程的解相同列出关于 k 的方程求解即可.

2.【解】 $\frac{1-k}{4}+2x=-\frac{1-2x}{2}$, $1-k+8x=-2+4x$, $4x=-3+k$, $x=\frac{-3+k}{4}$.

$k(2+x)=x(k+2)$, $2k+kx=kx+2x$, $x=k$.

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{1-k}{4}+2x=-\frac{1-2x}{2}$ 的解比关于 x 的方程 $k(2+x)=x(k+2)$ 的解大 6, $\therefore \frac{-3+k}{4}-k=6$, $-3+k-4k=24$, $-3k=27$, $k=-9$, $\therefore k$ 的值为 -9.

3.【解】 将 $a=1$, $b=1$ 代入方程 $\frac{2b-a+x}{2}=\frac{1}{2}b+x-2$, 得 $\frac{2-1+x}{2}=\frac{1}{2}+x-2$, 解得 $x=4$.

$\because$ 当 $a=1$, $b=1$ 时,关于 x 的方程 $\frac{2b-a+x}{2}=\frac{1}{2}b+x-2$ 的解与方程 $3m-2x=1-x$ 的解互为相反数,

$\therefore$ 方程 $3m-2x=1-x$ 的解为 $x=-4$,

$\therefore 3m+8=1+4$, 解得 $m=-1$.

4.【解】 $\frac{1-x}{3}=\frac{x-1}{2}$,

去分母,得 $2(1-x)=3(x-1)$,

去括号,得 $2-2x=3x-3$, 解得 $x=1$.

$\because$ 方程 $4-\frac{x+a}{3}=x-\frac{a-1}{2}$ 与方程 $\frac{1-x}{3}=\frac{x-1}{2}$ 的解相同,

$\therefore$ 将 $x=1$ 代入方程 $4-\frac{x+a}{3}=x-\frac{a-1}{2}$ 中,

得 $4-\frac{1+a}{3}=1-\frac{a-1}{2}$, 解得 $a=-13$,

故被墨汁污染的数是 -13.

5.【解】 解方程 $5x+\frac{34}{3}(m+1)=mn$, 得 $x=\frac{3mn-34m-34}{15}$,

解方程 $2x-mn=-\frac{19}{3}(m+1)$, 得 $x=\frac{3mn-19m-19}{6}$.

$\because$ 关于 x 的两个方程 $5x+\frac{34}{3}(m+1)=mn$ 与 $2x-mn=-\frac{19}{3}(m+1)$ 是同解方程,

$\therefore \frac{3mn-34m-34}{15}=\frac{3mn-19m-19}{6}$,

$\therefore mn-3m-3=0$,

$\therefore mn=3(m+1)$, $\therefore m=\frac{3}{n-3}$.

$\because m$, n 是正整数, $\therefore m=3$, $n=4$ 或 $m=1$, $n=6$.

6.【解】(1)方程 $3x-(x+5)=1$ 与方程 $y-2y=1$ 是“和谐方程”. 理由如下:

由 $3x-(x+5)=1$, 解得 $x=3$.

由 $y-2y=1$, 解得 $y=-1$.

$\because 3+(-1)=2$, $\therefore$ 方程 $3x-(x+5)=1$ 与方程 $y-2y=1$ 是“和谐方程”.

(2)由 $2x-n+3=0$, 解得 $x=\frac{n-3}{2}$.

由 $x+5n-1=0$, 解得 $x=1-5n$.

$\because$ 关于 x 的方程 $2x-n+3=0$ 与 $x+5n-1=0$ 是“和谐方程”,

$\therefore \frac{n-3}{2}+1-5n=2$, 解得 $n=-\frac{5}{9}$.

7.【解】 由题意可得 $x+a-1=2x-1$,

把 $x=2$ 代入,得 $2+a-1=2\times2-1$, 解得 $a=2$.

把 $a=2$ 代入原方程,得 $\frac{x+2}{3}-1=\frac{2x-1}{3}$,

解得 $x=0$.

关键点拨

由错误的解求得 a 的值是解题关键.

8.【解】 $\because$ 小文同学晚上写数学作业,在解方程“$-5x+1=2x-a$”时,将“$-5x$”中的负号抄漏了,解出 $x=2$, $\therefore$ 把 $x=2$ 代入方程 $5x+1=2x-a$, 得 $10+1=4-a$, 解得 $a=-7$,

即原方程为 $-5x+1=2x+7$, 移项得 $-5x-2x=7-$

1，$-7x=6$，解得 $x=-\frac{6}{7}$，

即方程正确的解是 $x=-\frac{6}{7}$.

9.【解】由题意得 $x=-4$ 是方程 $9x+5-4x-m=6$ 的解，

$\therefore 9\times(-4)+5-4\times(-4)-m=6$，

$\therefore m=-21$.

$\therefore$ 原方程为 $\frac{3x+5}{2}-\frac{2x+21}{3}=1$，解得 $x=\frac{33}{5}$.

10.【解】$a(x+1)=a-2(x-2)$，$ax+a=a-2x+4$，$ax=-2x+4$，$(a+2)x=4$，$x=\frac{4}{a+2}$.

$\because x$ 是正整数，a 为整数，

$\therefore a+2=1$ 或 2 或 4，即 $a=-1$ 或 0 或 2.

11.【解】解方程 $2(x-2)=\frac{kx}{3}+4$，得 $x=\frac{24}{6-k}$.

$\because$ 该方程的解为正整数，k 为整数，

$\therefore 6-k=1,2,3,4,6,8,12,24$，

$\therefore k=5,4,3,2,0,-2,-6,-18$，

$\therefore k$ 的所有可能取值的和为 $5+4+3+2+0+(-2)+(-6)+(-18)=-12$.

12.【解】去分母，得 $2+ax=8-2a$，

移项，得 $ax=8-2a-2$，

合并同类项，得 $ax=6-2a$，

系数化为 1，得 $x=\frac{6-2a}{a}$，即 $x=\frac{6}{a}-2$.

$\because$ 方程的解为非正整数，

$\therefore \frac{6}{a}-2\leqslant 0$，

$\therefore \frac{6}{a}\leqslant 2$ 且 $a\neq 0$.

又 $\because a$ 为整数，

$\therefore \frac{6}{a}=2$ 或 1 或 -1 或 -2 或 -3 或 -6，

$\therefore a=3$ 或 6 或 -6 或 -3 或 -2 或 -1.

专题四　二元一次方程组

模型 12　解复杂二元一次方程组

1.【解】$\begin{cases}2\,021x+2\,022y=2\,021,①\\2\,022x+2\,021y=2\,022,②\end{cases}$

①+②，得 $4\,043x+4\,043y=4043$，则 $x+y=1$，

②−①，得 $x-y=1$，则 $\begin{cases}x+y=1,③\\x-y=1,④\end{cases}$

③+④，得 $2x=2$，$\therefore x=1$.

把 $x=1$ 代入③，得 $y=0$，

故原方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=0.\end{cases}$

解题有法

方程组中对应未知数系数的和相同用叠加法，差相同用叠减法.

2.【解】$\begin{cases}361x+463y=-102,①\\463x+361y=102,②\end{cases}$

①+②得 $824x+824y=0$，

$\therefore x=-y$. ③

把③代入①得 $102y=-102$，

解得 $y=-1$，$\therefore x=1$，

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases}x=1,\\y=-1.\end{cases}$

3.【解】$\begin{cases}(a+2)x+(a+1)y=a,①\\ax+(a-1)y=a-2,②\end{cases}$

①−②，得 $2x+2y=2$，

$\therefore x+y=1$. ③

将③×a，得 $ax+ay=a$. ④

④−②，得 $y=2$.

把 $y=2$ 代入③，得 $x=-1$，

$\therefore$ 原方程组的解是 $\begin{cases}x=-1,\\y=2.\end{cases}$

4.【解】令 $\frac{2}{15}x-y=a$，$\frac{1}{15}x+y=b$，

原方程组可化为 $\begin{cases}4a-3b=6,\\4a+3b=18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=3,\\b=2,\end{cases}$

则 $\begin{cases}\frac{2}{15}x-y=3,\\\frac{1}{15}x+y=2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=25,\\y=\frac{1}{3}.\end{cases}$

5.【解】设 $4x+3y=m$，$6x-y=n$，则原方程组可化为

$$\begin{cases}\dfrac{m}{3}+\dfrac{n}{8}=8,\\ \dfrac{m}{6}+\dfrac{n}{2}=11,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}m=18,\\ n=16,\end{cases}$$

所以$\begin{cases}4x+3y=18,\\ 6x-y=16,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=3,\\ y=2.\end{cases}$

6.【解】令$\dfrac{a}{4}-1=x$，$\dfrac{b}{3}+2=y$，

原方程组可化为$\begin{cases}x+2y=4,\\ 2x+y=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=1,\end{cases}$

则$\begin{cases}\dfrac{a}{4}-1=2,\\ \dfrac{b}{3}+2=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=12,\\ b=-3.\end{cases}$

7.【解】(1)根据题意得$\begin{cases}x-2=1,\\ y+2=1,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=3,\\ y=-1.\end{cases}$

(2)由题意可得$\begin{cases}\dfrac{1}{3}(x+1)=k,\\ \dfrac{1}{2}(y-2)=k-2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=3k-1,\\ y=2k-2.\end{cases}$

思路分析

(1)将$(x-2)$和$(y+2)$看作整体；(2)将$\dfrac{1}{3}(x+1)$和$\dfrac{1}{2}(y-2)$看作整体.

模型 13　二元一次方程组的特殊解

1.【解】由已知可得$\begin{cases}2x+3y=10,\\ 4x-3y=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2,\\ y=2.\end{cases}$

把$\begin{cases}x=2,\\ y=2\end{cases}$代入剩下的两个方程组成的方程组

$\begin{cases}ax+by=9,\\ bx-ay=8,\end{cases}$得$\begin{cases}2a+2b=9,\\ 2b-2a=8,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=\dfrac{1}{4},\\ b=\dfrac{17}{4}.\end{cases}$

关键点拨

将不含参数的两个方程重组，求得此方程组的解，再代入由剩下的两个方程组成的方程组求参数的值.

2.【解】∵ 方程组$\begin{cases}3x-2y=4,\\ mx+ny=7\end{cases}$与$\begin{cases}2mx-3ny=19,\\ 5y-x=3\end{cases}$有相同的解，

∴$\begin{cases}3x-2y=4,\\ 5y-x=3\end{cases}$与原两方程组同解.

由 $5y-x=3$ 可得 $x=5y-3$.

将 $x=5y-3$ 代入 $3x-2y=4$，得 $3(5y-3)-2y=4$，

解得 $y=1$.

再将 $y=1$ 代入 $x=5y-3$，得 $x=2$.

将$\begin{cases}x=2,\\ y=1\end{cases}$代入$\begin{cases}mx+ny=7,\\ 2mx-3ny=19,\end{cases}$得$\begin{cases}2m+n=7,①\\ 4m-3n=19,②\end{cases}$

①×2−②，得 $n=-1$，

将 $n=-1$ 代入①，得 $m=4$. ∴ $m=4$，$n=-1$.

3.【解】把$\begin{cases}x=3,\\ y=2\end{cases}$代入 $2x-by=14$，得 $2\times3-2b=14$，

解得 $b=-4$.

把$\begin{cases}x=-2,\\ y=-1\end{cases}$代入 $ax+3y=-5$，得$-2a-3=-5$，

解得 $a=1$.

∴ 原方程组为$\begin{cases}x+3y=-5,①\\ 2x+4y=14,②\end{cases}$

①×2−②得 $2y=-24$，解得 $y=-12$.

把 $y=-12$ 代入①，得 $x+3\times(-12)=-5$，

解得 $x=31$，故方程组的解为$\begin{cases}x=31,\\ y=-12.\end{cases}$

4.【解】设方程组的第二个方程为 $ax-7y=8$，

将$\begin{cases}x=3\\ y=-2\end{cases}$代入得 $3a+14=8$，则 $a=-2$.

设方程组的第一个方程为 $bx+cy=2$，

把$\begin{cases}x=-2,\\ y=2\end{cases}$与$\begin{cases}x=3,\\ y=-2\end{cases}$代入得$\begin{cases}-2b+2c=2,\\ 3b-2c=2,\end{cases}$

解得$\begin{cases}b=4,\\ c=5,\end{cases}$∴ 原方程组为$\begin{cases}4x+5y=2,\\ -2x-7y=8.\end{cases}$

思路分析

将甲正确的解代入第二个方程求得一个系数，将甲、乙的解代入第一个方程求得另外两个系数.

5. 【解】$\begin{cases}3x-y=4m+1,①\\x+y=2m-5,②\end{cases}$ ①−②得 $2x-2y=2m+6$，

$\therefore x-y=m+3$.

由 $x-y=4$，可得 $m+3=4$，解得 $m=1$.

6. D 【解析】方程组 $\begin{cases}3x+y=2m-1,①\\x-y=n,②\end{cases}$ ①−②，得

$2x+2y=2m-n-1$，$\therefore x+y=\dfrac{2m-n-1}{2}$. $\because x+y=1$，

$\therefore \dfrac{2m-n-1}{2}=1$，$\therefore 2m-n=3$，$\therefore 4^m\div 2^n=2^{2m}\div 2^n=2^{2m-n}=2^3=8$. 故选 D.

7. 【解】$\begin{cases}2x+y=4+3a,①\\x+3y=1-5a,②\end{cases}$

①−②得 $x-2y=3+8a$.

$\because x-2y=-1$，$\therefore 3+8a=-1$，

解得 $a=-\dfrac{1}{2}$.

将 $a=-\dfrac{1}{2}$ 代入原方程组，得 $\begin{cases}2x+y=\dfrac{5}{2},\\x+3y=\dfrac{7}{2},\end{cases}$

解得 $\begin{cases}x=\dfrac{4}{5},\\y=\dfrac{9}{10}.\end{cases}$

8. 【解】$\begin{cases}2x+y=3m-1,①\\x+2y=m+2,②\end{cases}$

①+②得 $3x+3y=4m+1$，

$\therefore 3(x+y)=4m+1$，$\therefore x+y=\dfrac{4m+1}{3}$.

$\because x+y=7$，$\therefore \dfrac{4m+1}{3}=7$，

解得 $m=5$.

9. 【解】$\because x$，y 互为相反数，

$\therefore x=-y$. $\begin{cases}2x+5y=k,①\\x-3y=16,②\end{cases}$

将 $x=-y$ 代入②得 $-4y=16$，

$\therefore y=-4$，$\therefore x=4$，

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases}x=4,\\y=-4.\end{cases}$

将 $x=4$，$y=-4$ 代入①，得 $8-20=k$，

$\therefore k=-12$.

10. 【解】由题意得 $\begin{cases}x-y=-1,\\2x-y=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=3,\end{cases}$

代入方程 $x-2y=k$，得 $2-6=k$，

解得 $k=-4$.

专题五　不等式组

模型 14　解特殊不等式（组）

1. D 【解析】$\because$ 不等式组 $\begin{cases}x\geqslant 1,\\x<a\end{cases}$ 至少有两个整数解，$\therefore a$ 的取值范围是 $a>2$，故选 D.

2. A 【解析】$\begin{cases}x>m+3,①\\5x-2<4x+1,②\end{cases}$ 由②得 $x<3$. $\because$ 不等式组有解，$\therefore m+3<x<3$. 由不等式组的整数解仅有 4 个，得不等式组的整数解为 2，1，0，−1，

$\therefore -2\leqslant m+3<-1$，$\therefore -5\leqslant m<-4$. 故选 A.

解题有法

先解不等式组，然后根据整数解的个数判断端点取值情况，再求参数范围.

3. B 【解析】解不等式 $2x-1<5$，得 $x<3$. $\because$ 关于 x 的不等式组 $\begin{cases}2x-1<5,\\x<m+1\end{cases}$ 的解集为 $x<3$，$\therefore m+1\geqslant 3$，$\therefore m\geqslant 2$. 故选 B.

关键点拨

根据口诀“同大取大，同小取小，大小小大中间找，大大小小解不了”进行判断.

4. $m\leqslant 1$　【解析】解不等式$\frac{x-1}{3}<\frac{x-2}{2}$得$x>4$. ∵不等式组无解，∴$4m\leqslant 4$，解得$m\leqslant 1$. 故答案为$m\leqslant 1$.

5. 2或−1　【解析】$\begin{cases}2x+1>x+a,①\\ \frac{x}{2}+1\geqslant\frac{5}{2}x-9,②\end{cases}$解不等式①得$x>a-1$，解不等式②得$x\leqslant 5$. ∵不等式组有解，∴$a-1<x\leqslant 5$. ∵所有整数解的和为14，∴不等式组的整数解为5，4，3，2或5，4，3，2，1，0，−1，∴$1\leqslant a-1<2$或$-2\leqslant a-1<-1$，∴$2\leqslant a<3$或$-1\leqslant a<0$. ∵a为整数，∴$a=2$或$a=-1$，故答案为2或−1.

6.【解】解不等式$3x-a\geqslant 0$，得$x\geqslant\frac{a}{3}$.

解不等式$\frac{1}{2}(x-2)>3x+4$，得$x<-2$.

由题意得$\frac{a}{3}<-2$，解得$a<-6$，

∴a的取值范围为$a<-6$，不等式组的解集为$\frac{a}{3}\leqslant x<-2$.

7.【解】$\begin{cases}\frac{2x+1}{3}\geqslant x-1,①\\ 2x>a+1,②\end{cases}$

解不等式①，得$x\leqslant 4$.

解不等式②，得$x>\frac{a+1}{2}$.

根据题意知不等式组有解，

∴不等式组的解集是$\frac{a+1}{2}<x\leqslant 4$.

∵关于x的不等式组$\begin{cases}\frac{2x+1}{3}\geqslant x-1,\\ 2x>a+1\end{cases}$有且只有2个奇数解，

∴$-1\leqslant\frac{a+1}{2}<1$，解得$-3\leqslant a<1$.

∵a为整数，∴a为−3，−2，−1，0，

∴满足条件的所有整数a的和为$-3-2-1+0=-6$.

8.【解】$\begin{cases}\frac{x-3}{3}+1>\frac{x-2}{2},①\\ 2(x-1)\geqslant x+a,②\end{cases}$

由①得，$x<6$，由②得，$x\geqslant a+2$.

∵不等式组有解且最多有3个偶数解，

∴$-2<a+2<6$，

∴$-4<a<4$，∴满足条件的整数a为−3，−2，−1，0，1，2，3.

9.【解】(1)∵$2※3=1$，$3※(-1)=10$，

∴$\begin{cases}2a-3b+5=1,\\ 3a+b+5=10,\end{cases}$∴$\begin{cases}2a-3b=-4,\\ 3a+b=5,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\ b=2.\end{cases}$

(2)∵不等式组$\begin{cases}x※(2x-3)<9,\\ 3x※(-6)<t,\end{cases}$且$a=1$，$b=2$，

∴$ax-b(2x-3)+5=-3x+11<9$，$3ax+6b+5=3x+17<t$，

解得$\begin{cases}x>\frac{2}{3},\\ x<\frac{t-17}{3}.\end{cases}$

∵关于x的不等式组有且只有一个整数解，

∴$1<\frac{t-17}{3}\leqslant 2$，解得$20<t\leqslant 23$，

∴t的取值范围是$20<t\leqslant 23$.

10.【解】当$x-2<0$，$x+1<0$，即$x<-1$时，$2-x-(x+1)<5$，解得$x>-2$，∴$-2<x<-1$；

当$x-2<0$，$x+1\geqslant 0$，即$-1\leqslant x<2$时，$2-x+(x+1)<5$，

$3<5$，该不等式恒成立，∴在此范围内的x均满足题意，∴$-1\leqslant x<2$；

当$x-2\geqslant 0$，$x+1\geqslant 0$，即$x\geqslant 2$时，$x-2+(x+1)<5$，

解得$x<3$，∴$2\leqslant x<3$.

综上，不等式的解集为$-2<x<3$.

11.【解】当$x-2\geqslant 0$，即$x\geqslant 2$时，$x-2\leqslant 1+2x$，解得$x\geqslant -3$，∴$x\geqslant 2$；

当$x-2<0$，即$x<2$时，$2-x\leqslant 1+2x$，解得$x\geqslant\frac{1}{3}$，∴$\frac{1}{3}\leqslant x<2$.

综上，不等式$|x-2|\leqslant 1+2x$的解集为$x\geqslant\frac{1}{3}$.

12.【解】$2|x-2.5|+4<6$，

$2|x-2.5|<2$，

$|x-2.5|<1$，

$\therefore -1<x-2.5<1$，$\therefore 1.5<x<3.5$.

13.【解】$\because |2x-1|<a$，$\therefore -a<2x-1<a$，

解得$\frac{1-a}{2}<x<\frac{a+1}{2}$.

$\because$ 不等式的解集为$b<x<3$，

$\therefore \begin{cases}\frac{1-a}{2}=b,\\ \frac{a+1}{2}=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=5,\\ b=-2,\end{cases}$

$\therefore a-2b=5+4=9$.

14.【解】$|2x-2|>|2x+3|$，即$(2x-2)^2>(2x+3)^2$，

$4x^2-8x+4>4x^2+12x+9$，

解得$x<-\frac{1}{4}$.

15.【解】当$x<-2$时，$4-x-x-2>8$，解得$x<-3$.

当$-2\leqslant x\leqslant 4$时，$4-x+x+2>8$，无解.

当$x>4$时，$x-4+x+2>8$，解得$x>5$.

综上，不等式$|x-4|+|x+2|>8$的解集为$x>5$或$x<-3$.

易错警示

根据零点分段法去绝对值解不等式时，不等式的解集要符合分段的范围.

16.【解】当$x\geqslant\frac{1}{2}$时，$2x-1+3x+2<11$，

解得$x<2$，故$\frac{1}{2}\leqslant x<2$；

当$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}$时，$1-2x+3x+2<11$，

解得$x<8$，故$-\frac{2}{3}<x<\frac{1}{2}$；

当$x\leqslant-\frac{2}{3}$时，$1-2x-3x-2<11$，

解得$x>-\frac{12}{5}$，故$-\frac{12}{5}<x\leqslant-\frac{2}{3}$.

综上，$|2x-1|+|3x+2|<11$的解集是$-\frac{12}{5}<x<2$.

17.【解】将原问题转化为求a大于或等于$|x-3|-|x+4|$的最大值时a的取值范围.

当$x\geqslant 3$时，$|x-3|-|x+4|=-7$；

当$-4<x<3$时，$|x-3|-|x+4|=-2x-1$，$-7<-2x-1<7$；

当$x\leqslant -4$时，$|x-3|-|x+4|=7$.

即$|x-3|-|x+4|$的最大值为7. 故$a\geqslant 7$.

专题六　一元二次方程

模型15　解特殊方程

1.【解】令$x^2=y$，那么$x^4=y^2$，则原方程可变为$3y^2-5y+2=0$，解得$y_1=1$，$y_2=\frac{2}{3}$.

当$y=1$时，$x^2=1$，$\therefore x=\pm 1$；

当$y=\frac{2}{3}$时，$x^2=\frac{2}{3}$，$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$.

$\therefore$ 原方程有四个根：$x_1=1$，$x_2=-1$，$x_3=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$x_4=-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2.【解】令$x^2-x=y$，则原方程可变为$y^2-7y-60=0$，解得$y_1=12$，$y_2=-5$.

当$y=12$时，$x^2-x=12$，

即$(x+3)(x-4)=0$，解得$x_1=-3$，$x_2=4$；

当$y=-5$时，$x^2-x=-5$，即$x^2-x+5=0$，$\Delta=(-1)^2-4\times 5=-19<0$，方程没有实数解.

综上，原方程的解为$x_1=-3$，$x_2=4$.

关键点拨

令$x^2-x=y$，求得y的值后再还元求出x的值.

3.【解】令$x^3=y$，则原方程可化为$y^2-7y-8=0$，

解得$y_1=-1$，$y_2=8$，

$\therefore x^3=-1$或$x^3=8$，$\therefore x=-1$或$x=2$，

故原方程的解为$x_1=-1$，$x_2=2$.

4.【解】①当$x-2\geqslant 0$时，$x\geqslant 2$，

原方程可变为 $x^2-2(x-2)-4=0$，

解得 $x_1=0, x_2=2$.

$\because x\geqslant 2, \therefore x=2$；

②当 $x-2<0$ 时，$x<2$，

原方程可变为 $x^2+2(x-2)-4=0$，

解得 $x_1=2, x_2=-4$.

$\because x<2, \therefore x=-4$. $\therefore$ 原方程的解为 $x_1=2, x_2=-4$.

5.【解】当 $4x-6\geqslant 0$，即 $x\geqslant\frac{3}{2}$ 时，原方程可化为 $2x^2-3x=4x-6$，解得 $x_1=2, x_2=\frac{3}{2}$；

当 $4x-6<0$，即 $x<\frac{3}{2}$ 时，原方程可化为 $2x^2-3x=-4x+6$，解得 $x_1=-2, x_2=\frac{3}{2}$（舍）.

所以原方程的解为 $x_1=2, x_2=\frac{3}{2}, x_3=-2$.

6.【解】当 $x<-1$ 时，方程可化为 $x^2-x-1+x-2=0$，

解得 $x_1=\sqrt{3}$（舍），$x_2=-\sqrt{3}$；

当 $-1\leqslant x\leqslant 2$ 时，方程可化为 $x^2+x+1+x-2=0$，

$x_1=-1-\sqrt{2}$（舍），$x_2=-1+\sqrt{2}$；

当 $x>2$ 时，方程可化为 $x^2+x+1-x+2=0$，无解.

综上，方程的解为 $x_1=-\sqrt{3}, x_2=-1+\sqrt{2}$.

7.【解】原方程可化为 $|x+1|^2-5|x+1|+4=0$，$(|x+1|-1)(|x+1|-4)=0$，$\therefore |x+1|=1$ 或 $|x+1|=4$.

当 $|x+1|=1$ 时，$x+1=\pm 1$，解得 $x=0$ 或 -2；

当 $|x+1|=4$ 时，$x+1=\pm 4$，解得 $x=3$ 或 -5.

综上，原方程的解为 $x_1=-5, x_2=-2, x_3=0, x_4=3$.

思路分析

将 $|x+1|$ 看作整体，解得 $|x+1|$ 的值，再根据绝对值的性质求得原方程的解.

专题七　分式方程

模型 16　含参分式方程及换元法解分式方程

1.【解】$\because 2-\frac{1-2k}{x-3}=\frac{1}{3-x}$，$\therefore 2(x-3)-1+2k=-1$，

解得 $x=3-k$.

$\because$ 分式方程的解为正数，$\therefore 3-k>0, \therefore k<3$.

$\because x-3\neq 0, \therefore x\neq 3, \therefore 3-k\neq 3$，解得 $k\neq 0$.

综上所述，$k<3$ 且 $k\neq 0$.

2.【解】解 $\frac{x+m}{x-2}-3=\frac{x-1}{2-x}$，可得 $x=m+5$.

$\because$ 关于 x 的方程 $\frac{x+m}{x-2}-3=\frac{x-1}{2-x}$ 的解为非负数，

$\therefore m+5\geqslant 0$，解得 $m\geqslant -5$.

$\because x-2\neq 0, \therefore m+5-2\neq 0$，即 $m\neq -3$，

$\therefore m$ 的取值范围是 $m\geqslant -5$ 且 $m\neq -3$.

3.【解】$\frac{x}{x-2}+1=\frac{ax-2}{2-x}$，解得 $x=\frac{4}{2+a}$.

$\because x$ 为整数，且 $x\neq 2, \therefore \frac{4}{2+a}$ 为整数，且 $\frac{4}{2+a}\neq 2$，

$\therefore$ 正整数 a 的值是 2.

4.【解】该方程的增根为 $x=0$ 或 $x=-1$.

方程两边同乘 $x(x+1)$，得 $2mx-(m+1)=x+1$，

整理，得 $(2m-1)x=m+2$，

$\therefore 2m-1\neq 0$，解得 $m\neq\frac{1}{2}$.

当 $x=0$ 时，$(2m-1)\times 0=m+2$，解得 $m=-2$；

当 $x=-1$ 时，$(2m-1)\times(-1)=m+2$，

解得 $m=-\frac{1}{3}$，

$\therefore$ 实数 m 的值为 -2 或 $-\frac{1}{3}$.

5.【解】$\frac{3}{x-1}=\frac{nx}{3-3x}+1$，两边都乘 $3-3x$，得 $-9=nx+3-3x$，$\therefore (n-3)x=-12$.

当 $n-3=0$ 时，分式方程无解，此时 $n=3$；

当 $x=1$ 时，分式方程无解，此时 $(n-3)\times 1=-12$，即 $n=-9$.

综上可知，n 的值为 3 或 -9.

关键点拨

分式方程无解分为去分母后得到的整式方程无解和分式方程有增根两种情况.

6.【解】原方程化为$\frac{x-1}{x+2}-\frac{x+2}{x-1}=0$. 设 $y=\frac{x-1}{x+2}$,则原方程化为 $y-\frac{1}{y}=0$,

方程两边同乘 y,得 $y^2-1=0$,

解得 $y=\pm1$,

经检验,$y=\pm1$ 是方程 $y-\frac{1}{y}=0$ 的解.

当 $y=1$ 时,$\frac{x-1}{x+2}=1$,该方程无解;

当 $y=-1$ 时,$\frac{x-1}{x+2}=-1$,

解得 $x=-\frac{1}{2}$,

经检验,$x=-\frac{1}{2}$是原分式方程的解,

∴ 原分式方程的解为 $x=-\frac{1}{2}$.

易错警示

解分式方程不要忘记检验.

7.【解】设 $y=x^2-2x$,则原方程化为 $y-\frac{6}{y}=1$,

∴ $y^2-y-6=0$,

即 $(y-3)(y+2)=0$,

解得 $y_1=-2,y_2=3$,

经检验,$y_1=-2,y_2=3$ 是方程 $y-\frac{6}{y}=1$ 的解.

当 $y=-2$ 时,$x^2-2x=-2$,该方程无解;

当 $y=3$ 时,$x^2-2x=3$,

解得 $x_1=3,x_2=-1$,

经检验 $x_1=3,x_2=-1$ 都是原方程的解,

∴ 原方程的解是 $x_1=3,x_2=-1$.

8.【解】原方程化为$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)=6$.

设 $x+\frac{1}{x}=a$,则原方程化为 $a^2+2a-2=6$,

即 $a^2+2a-8=0$,

解得 $a=-4$ 或 $a=2$.

当 $a=-4$ 时,$x+\frac{1}{x}=-4$,

整理得 $x^2+4x+1=0$,

解得 $x_1=-2+\sqrt{3},x_2=-2-\sqrt{3}$;

当 $a=2$ 时,$x+\frac{1}{x}=2$,

整理得 $x^2-2x+1=0,(x-1)^2=0$,

解得 $x_1=x_2=1$.

经检验,$x_1=-2+\sqrt{3},x_2=-2-\sqrt{3},x_3=1$ 都是原方程的解,所以原方程的解是 $x_1=-2+\sqrt{3},x_2=-2-\sqrt{3},x_3=1$.

专题八　一次函数

模型 17　图象共存

1. D　【解析】∵ $a<0$,∴ 函数 $y=ax$ 的图象是经过第二、四象限,且过原点的直线,函数 $y=x+a$ 的图象是经过第一、三、四象限的直线,故选 D.

2. A　【解析】当 $k<0$ 时,正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图象经过第二、四象限,一次函数 $y=x-k$ 的图象经过第一、二、三象限;当 $k>0$ 时,正比例函数 $y=kx(k\neq0)$ 的图象经过第一、三象限,一次函数 $y=x-k$ 的图象经过第一、三、四象限,只有 A 选项符合题意,故选 A.

3. D　【解析】

A	由 y_1 的图象可知,$a>0,b>0$;由 y_2 的图象可知,$b<0,-a>0$,即 $a<0$,a,b 的符号矛盾	不符合题意
B	由 y_1 的图象可知,$a>0,b<0$;由 y_2 的图象可知,$b<0,-a>0$,即 $a<0$,a 的符号矛盾	不符合题意
C	由 y_1 的图象可知,$a<0,b<0$;由 y_2 的图象可知,$b<0,-a<0$,即 $a>0$,a 的符号矛盾	不符合题意

续表

D	由 y_1 的图象可知，$a>0,b>0$；由 y_2 的图象可知，$b>0,-a<0$，即 $a>0,a,b$ 的符号一致	符合题意

知识归纳 一次函数 $y=kx+b$ $(k\neq0,b\neq0)$ 的图象的四种情况

①当 $k>0,b>0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限；

②当 $k>0,b<0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、三、四象限；

③当 $k<0,b>0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、四象限；

④当 $k<0,b<0$ 时，函数 $y=kx+b$ 的图象经过第二、三、四象限.

4. B 【解析】

A	$l_1:y=kx-b$ 中 $k>0,b<0$；$l_2:y=-2kx+b$ 中 $k>0,b>0$，b 的符号矛盾	不符合题意
B	$l_1:y=kx-b$ 中 $k>0,b<0$；$l_2:y=-2kx+b$ 中 $k>0,b<0$，k,b 的符号一致	符合题意
C	$l_1:y=kx-b$ 中 $k<0,b<0$；$l_2:y=-2kx+b$ 中 $k>0,b<0$，k 的符号不一致	不符合题意
D	$l_1:y=kx-b$ 中 $k>0,b<0$；$l_2:y=-2kx+b$ 中 $k<0,b<0$，k 的符号不一致	不符合题意

5. D 【解析】

A	一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、三象限，则 $a>0,b>0$，所以 $ab>0$，则反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 的图象应该位于第一、三象限	不符合题意
B	一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限，则 $a<0,b>0$，所以 $ab<0$，则反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 的图象应该位于第二、四象限	不符合题意

续表

C	一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限，则 $a>0,b<0$，所以 $ab<0$，则反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 的图象应该位于第二、四象限	不符合题意
D	一次函数 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限，则 $a<0,b>0$，所以 $ab<0$，则反比例函数 $y=\frac{ab}{x}$ 的图象应该位于第二、四象限	符合题意

6. D 【解析】∵ $a<0,-3<0$，∴ 函数 $y=ax-3$ 的图象经过第二、三、四象限. ∵ $b>0$，∴ 函数 $y=\frac{b}{x}$ 的图象位于第一、三象限，故 D 选项符合题意. 故选 D.

7. A 【解析】

若 $a>0,b>0$	$y=ax+b$ 的图象经过第一、二、三象限	$y=\frac{b}{ax}$ 的图象位于第一、三象限
若 $a>0,b<0$	$y=ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限	$y=\frac{b}{ax}$ 的图象位于第二、四象限
若 $a<0,b>0$	$y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限	$y=\frac{b}{ax}$ 的图象位于第二、四象限
若 $a<0,b<0$	$y=ax+b$ 的图象经过第二、三、四象限	$y=\frac{b}{ax}$ 的图象位于第一、三象限

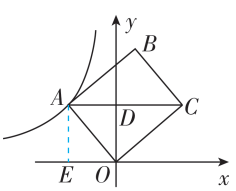
综上所述，只有 A 选项符合题意. 故选 A.

8. C 【解析】当 $k>0$ 时，反比例函数的图象位于第一、三象限，正比例函数的图象经过第一、三象限，故②正确；当 $k<0$ 时，反比例函数的图象位于第二、四象限，正比例函数的图象经过第二、四象限，故④正确. 故选 C.

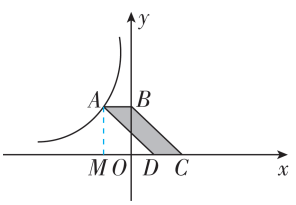
专题九　反比例函数

模型 18　反比例函数比例系数 k 的几何意义

1. $-\frac{8}{3}$　【解析】过点 A 作 $AE\perp x$ 轴于 E，如图所示．∵ $S_{矩形OABC}=6$，∴ $S_{\triangle AOC}=3$．∵ $\angle AOC=90°$，$\cos\angle OAC=\frac{2}{3}$，∴ $\frac{OA}{AC}=\frac{2}{3}$．∵ $AC\parallel x$ 轴，∴ $\angle AOE=\angle OAC$．∵ $\angle OEA=\angle AOC=90°$，∴ $\triangle OEA\backsim\triangle AOC$，∴ $\frac{S_{\triangle OEA}}{S_{\triangle AOC}}=\left(\frac{OA}{AC}\right)^2$，∴ $\frac{S_{\triangle OEA}}{3}=\frac{4}{9}$，∴ $S_{\triangle OEA}=\frac{4}{3}$．∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x<0)$ 的图象上，∴ $S_{\triangle OEA}=\frac{1}{2}|k|$．∵ $k<0$，∴ $k=-\frac{8}{3}$．故答案为 $-\frac{8}{3}$．



（第 1 题图）

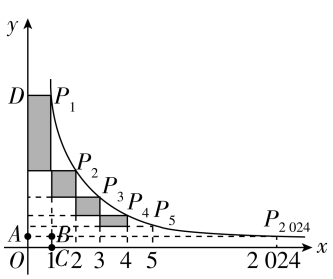


（第 2 题图）

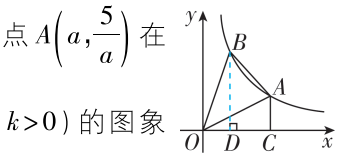
2. B　【解析】如图，过点 A 作 $AM\perp x$ 轴，垂足为 M，则有 $S_{矩形AMOB}=S_{平行四边形ABCD}=|-6|=6$，故选 B．

3. 6　【解析】∵ 点 A 在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上，$AC\perp y$ 轴于点 C，则 $S_{\triangle AOC}=\frac{|k|}{2}=\frac{|6|}{2}=3$．∵ A,B 两点均在反比例函数 $y=\frac{6}{x}$ 的图象上，线段 AB 经过坐标原点 O，∴ $AO=OB$，∴ $S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle AOC}=6$，故答案为 6．

4. $\frac{2\,023}{253}$　【解析】如图．∵ $P_1,P_2,P_3,\cdots,P_{2\,024}$ 的横坐标依次为 $1,2,3,\cdots,2\,024$，∴ 每个阴影矩形的一边长都为 1．将除第一个阴影矩形外的所有阴影矩形向左平移至第一个阴影矩形下，可得 $S_1+S_2+S_3+\cdots+S_{2\,023}=S_{矩形ABP_1D}$．把 $x=2\,024$ 代入关系式 $y=\frac{8}{x}$，得 $y=\frac{1}{253}$，即 $OA=\frac{1}{253}$，∴ $S_{矩形OABC}=OA\cdot OC=\frac{1}{253}$．由反比例函数的比例系数的几何意义得 $S_{矩形OCP_1D}=8$，∴ $S_{矩形ABP_1D}=8-\frac{1}{253}=\frac{2\,023}{253}$．故答案为 $\frac{2\,023}{253}$．



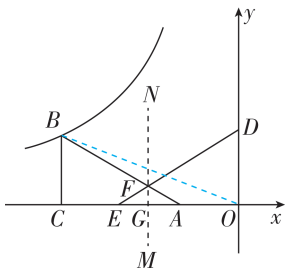
5. $\frac{5}{2}$　2　【解析】因为点 $A\left(a,\frac{5}{a}\right)$ 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k>0)$ 的图象上，所以 $\frac{5}{a}=\frac{k}{a}$，所以 $k=5$．根据 k 的几何意义可知，$S_{\triangle AOC}=\frac{|k|}{2}=\frac{5}{2}$．如图，过点 B 作 x 轴的垂线，垂足为 D，则 $S_{\triangle OBD}+S_{梯形ACDB}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle AOB}$．又因为 $S_{\triangle OBD}=S_{\triangle AOC}$，所以 $S_{梯形ACDB}=S_{\triangle AOB}$．又因为 $\triangle AOB$ 的面积为 $\frac{15}{4}$，且 $A\left(a,\frac{5}{a}\right)$，$B\left(b,\frac{5}{b}\right)$，所以 $\frac{\left(\frac{5}{a}+\frac{5}{b}\right)(a-b)}{2}=\frac{15}{4}$，即 $\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}$，解得 $\frac{a}{b}=2$ 或 $\frac{a}{b}=-\frac{1}{2}$．又因为 $a>b>0$，所以 $\frac{a}{b}=2$．故答案为 $\frac{5}{2}$，2．



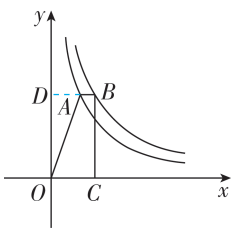
6. −6　【解析】如图，连接 OB，设对称轴 MN 与 x 轴交于 G．∵ $\triangle ODE$ 与 $\triangle CBA$ 关于 MN 对称，∴ $AG=EG$，$AC=EO$，∴ $EC=AO$．∵ 点 A 为 OE 的中点，∴ $AE=AO$．设 $AG=EG=a$，则 $EC=AO=AE=2a$，∴ $AC=EO=4a$．∵ $S_{\triangle EAF}=\frac{1}{4}$，∴ $S_{\triangle EGF}=\frac{1}{2}S_{\triangle EAF}=\frac{1}{8}$．∵ $GF\parallel OD$，∴ $\triangle EFG\backsim\triangle EDO$，∴ $\frac{S_{\triangle EGF}}{S_{\triangle EOD}}=\left(\frac{EG}{EO}\right)^2$，即 $\frac{\frac{1}{8}}{S_{\triangle EOD}}=\left(\frac{a}{4a}\right)^2$，∴ $S_{\triangle EOD}=\frac{1}{8}\times16=2$，∴ $S_{\triangle ACB}=2$．∵ $AC=4a$，$AO=2a$，∴ $S_{\triangle AOB}=$

$\frac{1}{2}S_{\triangle ACB}=1$，$\therefore S_{\triangle OCB}=S_{\triangle ACB}+S_{\triangle AOB}=2+1=3$，

$\therefore \frac{1}{2}|k|=3$. $\because k<0$，$\therefore k=-6$，故答案为-6.



7. B 【解析】延长BA交y轴于点D，如图. $\because AB/\!/x$轴，$\therefore DA\perp y$轴. $\because$点A在函数$y=\frac{2}{x}(x>0)$的图象上，$\therefore S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}\times 2=1$. $\because BC\perp x$轴于点C，$DB\perp y$轴，点B在函数$y=\frac{3}{x}(x>0)$的图象上，$\therefore S_{矩形OCBD}=3$，$\therefore S_{四边形ABCO}=S_{矩形OCBD}-S_{\triangle ADO}=3-1=2$. 故选 B.



8. A 【解析】$\because PA\perp x$轴于点A，交C_2于点B，$\therefore S_{\triangle POA}=\frac{1}{2}\times 4=2$，$S_{\triangle BOA}=\frac{1}{2}\times 2=1$，$\therefore S_{\triangle POB}=2-1=1$. 故选 A.

9. A 【解析】如图，过A作$AC\perp x$轴于C，过B作$BD\perp x$轴于D，

作垂直构造直角三角形

$\therefore S_{\triangle ACO}=\frac{1}{2}\times|-1|=\frac{1}{2}$，$S_{\triangle BDO}=\frac{1}{2}\times|4|=2$，

反比例函数中k的几何意义

$\angle ACO=\angle ODB=90°$.

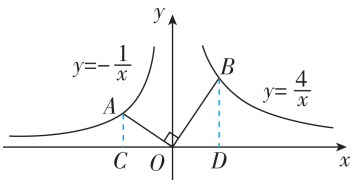
$\because OA\perp OB$，

$\therefore \angle AOC=\angle OBD=90°-\angle BOD$，

$\therefore \triangle AOC\backsim\triangle OBD$，

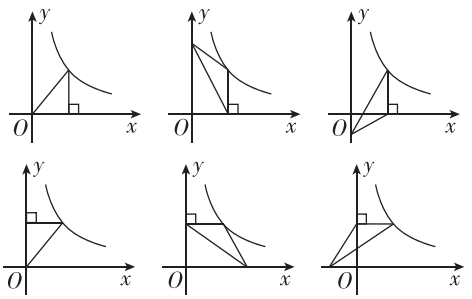
$\therefore \frac{S_{\triangle ACO}}{S_{\triangle BDO}}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2$，即$\frac{\frac{1}{2}}{2}=\left(\frac{OA}{OB}\right)^2$，

$\therefore \frac{OA}{OB}=\frac{1}{2}$（负值已舍去），故选 A.

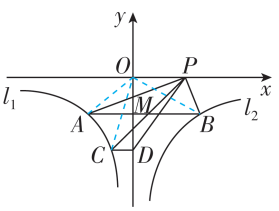


解题有法

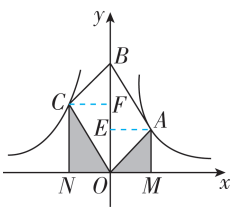
过反比例函数图象上一点作某一坐标轴的垂线，以该点、垂足与另一坐标轴上一点（含原点）为顶点的三角形面积为$\frac{1}{2}|k|$.



10. B 【解析】连接OA，OC，OB，设AB与y轴交于点M，如图. $\because CD\perp y$轴，$\therefore CD/\!/x$轴. 又$\because S_{\triangle CPD}=2$，$\therefore S_{\triangle OCD}=S_{\triangle CPD}=S_{\triangle OAM}=2$. $\because AB/\!/x$轴，$\therefore S_{\triangle APB}=S_{\triangle OAB}=5$，$\therefore S_{\triangle OMB}=S_{\triangle OAB}-S_{\triangle OAM}=5-2=3$，$\therefore |n|=2\times 3=6$. $\because n<0$，$\therefore n=-6$，故选 B.



（第 10 题图）

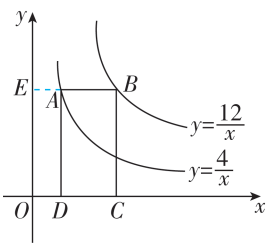


（第 11 题图）

11. D 【解析】作$AE\perp y$轴于E，$CF\perp y$轴于F，如图. $\because$四边形$OABC$是平行四边形，$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}$，$\therefore AE=CF$，$\therefore OM=ON$. $\because S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|=\frac{1}{2}OM\cdot AM$，$S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|=\frac{1}{2}ON\cdot CN$，$\therefore \frac{AM}{CN}=\left|\frac{k_1}{k_2}\right|$，故①正确. $\because S_{\triangle AOM}=\frac{1}{2}|k_1|$，$S_{\triangle CON}=\frac{1}{2}|k_2|$，$\therefore S_{阴影部分}=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle CON}=$

$\frac{1}{2}(|k_1|+|k_2|)$，而 $k_1>0$，$k_2<0$，∴ $S_{阴影部分}=\frac{1}{2}(k_1-k_2)$，故②错误. 当 $\angle AOC=90°$ 时，四边形 $OABC$ 是矩形. ∵ 不能确定 OA 与 OC 是否相等，而 $OM=ON$，∴ 不能判定 $\triangle AMO\cong\triangle CNO$，∴ 不能判断 AM 与 CN 是否相等，∴ 不能确定 $|k_1|$ 与 $|k_2|$ 是否相等，故③错误. 若四边形 $OABC$ 是菱形，则 $OA=OC$，而 $OM=ON$，$\angle AMO=\angle CNO=90°$，∴ $\mathrm{Rt}\triangle AOM\cong\mathrm{Rt}\triangle CON$（HL），∴ $AM=CN$，∴ $|k_1|=|k_2|$，∴ $k_1=-k_2$，∴ $k_1+k_2=0$，故④正确. 故选 D.

12. 8 【解析】如图，延长 BA 交 y 轴于 E，则 $BE\perp y$ 轴. ∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，∴ $AD\perp x$ 轴，$BC\perp x$ 轴，∴ 四边形 $AEOD$ 和四边形 $BEOC$ 为矩形. ∵ 点 A 在双曲线 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 上，∴ 矩形 $AEOD$ 的面积为 4. ∵ 点 B 在双曲线 $y=\frac{12}{x}(x>0)$ 上，∴ 矩形 $BEOC$ 的面积为 12，∴ 矩形 $ABCD$ 的面积为 12−4=8. 故答案为 8.



专题十　二次函数

模型 19　二次函数的图象与性质

1. C 【解析】①∵ $-\frac{b}{2a}=-\frac{1}{2}$，∴ $a=b$. ∵ $a<0$，$c>0$，∴ $abc>0$，故①正确. ②∵ 当 $x=1$ 时，$y<0$，∴ $a+b+c<0$，∴ $2b+c<0$，故②不正确. ③∵ 抛物线开口向下，∴ 离对称轴越远的点对应的函数值越小. ∵ $3-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}$，$-\frac{1}{2}-(-3)=\frac{5}{2}$，$\frac{7}{2}>\frac{5}{2}$，∴ $y_1>y_2$，故③正确. ④∵ 一元二次方程 $ax^2+bx+c-3=0$ 无实数根，∴ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与直线 $y=3$ 无交点，∴ $m<3$，故④正确. 综上，①③④正确. 故选 C.

2. B 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，$a<0$）的顶点为（1，2），∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$. ∵ $a<0$，∴ $b>0$. ∵ $a+b+c=2$，∴ $c=2-a-b=2-a-(-2a)=2+a$，∴ c 无法判断，故①错误. ∵ $a<0$，∴ 抛物线开口向下. ∵ 对称轴为直线 $x=1$，∴ 当 $x>1$ 时，y 随 x 的增大而减小，故②正确. ∵ $b=-2a$，$c=2+a$，∴ $y=ax^2-2ax+2+a$. 若 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根为 3，则当 $x=3$ 时，$y=0$，∴ $0=9a-6a+2+a$，∴ $a=-\frac{1}{2}$，故③正确. ∵ $y=ax^2+bx+c=a(x-1)^2+2$，∴ 将抛物线向左平移 1 个单位，再向下平移 2 个单位得到 $y=a(x-1+1)^2+2-2=ax^2$，故④错误. 故选 B.

3. C 【解析】本题考查了二次函数的图象和性质. ∵ 抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，与 y 轴交于负半轴，∴ $a>0$，$b=-2a<0$，$c<0$，∴ $abc>0$，故①错误. 由题图可知，抛物线与 x 轴的一个交点的横坐标的取值范围为 $-1<x<0$，∵ 抛物线关于直线 $x=1$ 对称，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点的横坐标的取值范围为 $2<x<3$，∴ 方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$ 必有一个根大于 2 且小于 3，故②正确. ∵ $a>0$，∴ 抛物线上的点离对称轴的距离越远，函数值越大. ∵ $(0,y_1)$，$\left(\frac{3}{2},y_2\right)$ 是抛物线上的两点，且 $|0-1|>\left|\frac{3}{2}-1\right|$，∴ $y_1>y_2$，故③错误. ∵ $a>0$，$b=-2a$，∴ $11a+2c=5a+2a-2b+2c=5a+2(a-b+c)$，由图象知 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，∴ $11a+2c=5a+2(a-b+c)>0$，故④正确. ∵ $a>0$，对称轴为直线 $x=1$，∴ 当 $x=1$ 时，函数值最小，为 $a+b+c$，∴ 对于任意实数 m，都有 $am^2+bm+c\geqslant a+b+c$，即 $am^2+bm\geqslant a+b$，∴ $m(am+b)\geqslant a+b$，故⑤正确. 综上，正确的结论有 3 个. 故选 C.

4. B 【解析】由表格中数据可知抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-1$，$c=-1$.

①	当 $x=-2$ 时，$4a-2b-1=-1$，∴ $2a-b=0\neq-1$，即 $2a-b\neq c$	错误

续表

②	∵抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=-1$，∴ $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大. ∵点 $(-3,n)$ 与点 $(1,n)$ 关于直线 $x=-1$ 对称，∴当 $x=2$ 时，$y=4a+2b+c>n$. ∵ $n>0$，∴ $4a+2b+c>0$	正确
③	∵ $x>-1$ 时，y 随 x 的增大而增大，且 $x=0$ 时，$y=-1$，∴ $x=-1$ 时，$p=a-b+c<0$. ∵点 $(-3,n)$ 与点 $(1,n)$ 关于直线 $x=-1$ 对称，$n>0$，∴ $x=1$ 时，$n=a+b+c>0$，∴ $(a-b+c)(a+b+c)<0$，即 $(a+c)^2-b^2<0$	错误
④	∵抛物线开口向上，顶点坐标为 $(-1,p)$，∴若直线 $y=m$（m 为常数）与二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象有两个交点，则 $m>p$	正确

5. D 【解析】∵图象经过 $(-1,0)$，$(3,0)$，∴抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的对称轴为直线 $x=1$，∴ $-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a$，即 $2a+b=0$，①正确. 由图象可得抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 y 轴交点在 x 轴下方，∴ $c<0$，②错误. 由抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的开口向上可得 $a>0$，∴ $b=-2a<0$，∴ $abc>0$，③正确. 由题意得，当 $-1<x<3$ 时，函数解析式为 $y=-a(x+1)(x-3)$，代入 $(0,3)$ 得 $3=3a$，解得 $a=1$，∴ $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，∴此段抛物线的顶点坐标为 $(1,4)$. ∵点 $(1,4)$ 向上平移 1 个单位后的坐标为 $(1,5)$，∴将图象向上平移 1 个单位后与直线 $y=5$ 有 3 个交点，故④正确. 故选 D.

6. ②③④ 【解析】①图象经过 $(1,1)$，$c<0$，即抛物线与 y 轴的负半轴有交点，若抛物线的开口向上，则抛物线与 x 轴的两个交点都在 $(1,0)$ 的左侧，但 $(n,0)$ 中 $n\geqslant 3$，∴抛物线与 x 轴的一个交点是 $(3,0)$ 或在 $(3,0)$ 的右侧，∴抛物线的开口向下，即 $a<0$. 把 $(1,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $a+b+c=1$，即 $b=1-a-c$. ∵ $a<0$，$c<0$，∴ $b>0$，故①错误. ②∵ $a<0$，$c<0$，∴ $\frac{c}{a}>0$，∴方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根的积大于 0，即 $mn>0$. ∵ $n\geqslant 3$，∴ $m>0$，∴ $\frac{m+n}{2}>1.5$，即抛物线的对称轴在直线 $x=1.5$ 的右侧，∴抛物线的顶点在点 $(1,1)$ 的右侧，∴ $\frac{4ac-b^2}{4a}>1$. ∵ $4a<0$，∴ $4ac-b^2<4a$，故②正确. ③∵ $m>0$，∴当 $n=3$ 时，$\frac{m+n}{2}>1.5$，∴抛物线对称轴在直线 $x=1.5$ 的右侧，∴ $(1,1)$ 到对称轴的距离大于 $(2,t)$ 到对称轴的距离. ∵抛物线开口向下，∴距离抛物线对称轴越近，函数值越大，∴ $t>1$，故③正确. ④方程 $ax^2+bx+c=x$ 可变为 $ax^2+(b-1)x+c=0$. ∵方程有两个相等的实数根，∴ $\Delta=(b-1)^2-4ac=0$. 把 $(1,1)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$ 得 $a+b+c=1$，即 $1-b=a+c$，∴ $(1-b)^2=(b-1)^2=(a+c)^2$，∴ $(a+c)^2-4ac=0$，即 $a^2+2ac+c^2-4ac=0$，∴ $(a-c)^2=0$，∴ $a-c=0$，即 $a=c$. ∵ $(m,0)$，$(n,0)$ 在抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 上，∴ m,n 为方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根，∴ $mn=\frac{c}{a}=1$，∴ $n=\frac{1}{m}$. ∵ $n\geqslant 3$，∴ $\frac{1}{m}\geqslant 3$，∴ $0<m\leqslant\frac{1}{3}$，故④正确. 综上，正确的是②③④. 故答案为②③④.

7. $y=-x^2+4x-3$ 【解析】∵抛物线 C_2 与抛物线 C_1 关于 x 轴对称，∴当横坐标相等时，纵坐标互为相反数，即 $-y=x^2-4x+3$，∴ $y=-x^2+4x-3$，故所求抛物线 C_2 的函数解析式为 $y=-x^2+4x-3$. 故答案为 $y=-x^2+4x-3$.

解题有法

关于 x 轴对称的两点，其横坐标相等，纵坐标互为相反数.

8. B 【解析】将二次函数 $y=(x+1)^2+3$ 的图象向右平移 2 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，所得抛物线对应的函数解析式为 $y=(x+1-2)^2+3-1$，即 $y=(x-1)^2+2$. 故选 B.

关键点拨

二次函数图象的平移规律：左加右减自变量，上加下减常数项.

9. C 【解析】∵二次函数 $y=x^2-4$ 的图象的顶点坐标为 $(0,-4)$，∴沿直线 $x=2$ 翻折后得到的二次函数图象的顶点坐标为 $(4,-4)$，∴这个二次函数的解析式为 $y=(x-4)^2-4$，即 $y=x^2-8x+$

12. 故选 C.

10. $y=-2(x+1)^2+6$ 【解析】∵ 抛物线的顶点坐标为$(-1,6)$，∴ 抛物线解析式可设为 $y=a(x+1)^2+6(a\neq0)$. ∵ 抛物线 $y=a(x+1)^2+6(a\neq0)$ 的形状、开口方向均与抛物线 $y=-2x^2+9x$ 相同，∴ $a=-2$，∴ 这个抛物线的解析式为 $y=-2(x+1)^2+6$. 故答案为 $y=-2(x+1)^2+6$.

11. $y=-x^2+1$（答案不唯一） 【解析】由题意得 $b=0$，$a<0$，$c>0$，∴ 这个二次函数的解析式可以是 $y=-x^2+1$，故答案为 $y=-x^2+1$（答案不唯一）.

12. $y=-2x^2+8x$ 【解析】在 $y=2x^2-8$ 中，令 $y=0$ 得 $x=2$ 或 $x=-2$，∴ 抛物线 C_1 的顶点坐标为$(0,-8)$，与 x 轴交点坐标为$(2,0)$和$(-2,0)$. 将点$(0,-8)$绕点$(1,0)$旋转 180°，得到抛物线 C_2 的顶点坐标为$(2,8)$；将点$(2,0)$和点$(-2,0)$绕点$(1,0)$旋转 180°，得到抛物线 C_2 与 x 轴交点为点$(0,0)$和点$(4,0)$. 设抛物线 C_2 的解析式为 $y=a(x-2)^2+8(a\neq0)$，把$(0,0)$代入得 $0=4a+8$，解得 $a=-2$，∴ 抛物线 C_2 的解析式为 $y=-2(x-2)^2+8=-2x^2+8x$.

13. 【解】(1) 把 $A(2,3)$，$B(3,6)$，$C(-1,6)$ 代入 $y=ax^2+bx+c$，

得$\begin{cases}4a+2b+c=3,\\9a+3b+c=6,\\a-b+c=6,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=-2,\\c=3,\end{cases}$

∴ 该二次函数解析式为 $y=x^2-2x+3$.

(2) ∵ 将该二次函数的图象平移，使其经过点 $D(5,0)$，且对称轴为直线 $x=4$，∴ 设平移后的二次函数图象的解析式为 $y=(x-4)^2+k$，将点 $D(5,0)$ 代入 $y=(x-4)^2+k$，得 $(5-4)^2+k=0$，解得 $k=-1$，∴ 平移后的二次函数图象的解析式为 $y=(x-4)^2-1=x^2-8x+15$.

14. 【解】(1) ∵ 二次函数的图象的顶点坐标为$(2,0)$，∴ 设二次函数解析式为 $y=a(x-2)^2(a\neq0)$. ∵ 二次函数的图象经过点$(-2,4)$，∴ $4=a(-2-2)^2$，∴ $a=\frac{1}{4}$. ∴ 二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{4}(x-2)^2$.

(2) 由题意，设二次函数解析式为 $y=a(x-3)(x+2)(a\neq0)$. ∵ 其图象经过点$(0,6)$，∴ $6=a(0-3)(0+2)$，∴ $a=-1$. ∴ 二次函数的解析式为 $y=-(x-3)(x+2)=-x^2+x+6$.

15. 【解】(1) 根据题表可知，点$(-1,-2)$和点$(0,-2)$关于函数图象的对称轴对称，

∴ 函数图象的对称轴是直线 $x=-\frac{1}{2}$.

设二次函数的解析式是 $y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+k$ $(a\neq0)$，

把点$(-2,0)$和点$(0,-2)$代入，得

$\begin{cases}a\left(-2+\frac{1}{2}\right)^2+k=0,\\a\left(0+\frac{1}{2}\right)^2+k=-2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\k=-\frac{9}{4},\end{cases}$

∴ $y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}=x^2+x-2$,

∴ 该二次函数的解析式是 $y=x^2+x-2$.

(2) 当 $y=4$ 时，$x^2+x-2=4$，

解得 $x=-3$ 或 $x=2$.

∵ $a=1>0$，

∴ 抛物线开口向上，∴ 当 $y\leqslant4$ 时，自变量 x 的取值范围是$-3\leqslant x\leqslant2$.

16. 【解】(1) 把 $A(0,6)$，$B(3,3)$，$C(4,6)$ 分别代入 $y=ax^2+bx+c$，得$\begin{cases}c=6,\\9a+3b+c=3,\\16a+4b+c=6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\b=-4,\\c=6,\end{cases}$

∴ 此二次函数的解析式为 $y=x^2-4x+6$.

(2) $y>6$ 时，x 的取值范围为 $x<0$ 或 $x>4$.

模型 20　二次函数性质的综合

1. 【解】(1) 将$(2,1)$代入 $y=x^2-2tx+3$ 得 $1=4-4t+3$，

解得 $t=\frac{3}{2}$.

(2) 抛物线 $y=x^2-2tx+3$ 的对称轴为直线 $x=t$.

若 $0<t<3$，当 $x=t$ 时函数取最小值，

$\therefore t^2-2t^2+3=-2$，

解得 $t=\sqrt{5}$（负值已舍去）；

若 $t\geqslant 3$，当 $x=3$ 时函数取最小值，

$\therefore 9-6t+3=-2$，

解得 $t=\dfrac{7}{3}$（不符合题意，舍去）.

综上所述，t 的值为 $\sqrt{5}$.

（3）$\because A(m-2,a)$，$C(m,a)$ 都在这个二次函数的图象上，

$\therefore$ 二次函数 $y=x^2-2tx+3$ 图象的对称轴为直线 $x=\dfrac{m-2+m}{2}=m-1$，

$\therefore t=m-1$.

$\because t>0$，$\therefore m-1>0$，

解得 $m>1$.

$\because m-2<m$，

$\therefore A$ 在对称轴左侧，C 在对称轴右侧.

在 $y=x^2-2tx+3$ 中，令 $x=0$ 得 $y=3$，

$\therefore$ 抛物线 $y=x^2-2tx+3$ 与 y 轴交点为 $(0,3)$.

$\because (0,3)$ 关于对称轴 $x=m-1$ 对称的点为 $(2m-2,3)$，$b<3$，

$\therefore 4<2m-2$，

解得 $m>3$.

①当 $A(m-2,a)$，$B(4,b)$ 都在对称轴左侧时，

$\because y$ 随 x 的增大而减小，且 $a<b$，

$\therefore 4<m-2$，解得 $m>6$，

此时 m 满足的条件为 $m>6$；

②当 $A(m-2,a)$ 在对称轴左侧，$B(4,b)$ 在对称轴右侧时，

$\because a<b$，$\therefore m<4$，

此时 m 满足的条件是 $3<m<4$.

综上所述，$3<m<4$ 或 $m>6$.

2.【解】（1）$\because$ 对于 $x_1=1$，$x_2=2$，有 $y_1=y_2$，

$\therefore$ 抛物线的对称轴为直线 $x=t=\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{3}{2}$，

$\therefore t=\dfrac{3}{2}$.

（2）$\because 0<x_1<1$，$1<x_2<2$，

$\therefore \dfrac{1}{2}<\dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{3}{2}$，$x_1<x_2$.

$\because y_1<y_2$，$a>0$，

$\therefore$ 点 $M(x_1,y_1)$ 离对称轴更近，则 $M(x_1,y_1)$ 与 $N(x_2,y_2)$ 的中点在对称轴的右侧，

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}>t$，即 $t\leqslant\dfrac{1}{2}$.

3.【解】（1）$\because x_0=-2$，$y_0=3$，点 (x_0,y_0) 是抛物线 $y=ax^2+bx+3(a>0)$ 上任意一点，

$\therefore$ 抛物线过点 $(-2,3)$，

$\therefore 4a-2b+3=3$，即 $b=2a$，

$\therefore$ 抛物线对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2a}{2a}=-1$，即该抛物线的对称轴为直线 $x=-1$.

（2）$y_1>y_3>y_2$. 理由如下：

设抛物线对称轴为直线 $x=t$，则抛物线上点 $(0,3)$ 关于对称轴对称的点为 $(2t,3)$，

$\because$ 存在 $3<x_0<4$，恰好使 $y_0=3$，

$\therefore 3<2t<4$，即 $\dfrac{3}{2}<t<2$.

$\because$ 抛物线开口向上，

$\therefore$ 在对称轴的左侧，y 随 x 增大而减小.

又$\because$（$3,y_3$）关于对称轴对称的点为（$2t-3$，y_3），且 $0<2t-3<1$，

$\therefore$ 点（$-1,y_1$），（$1,y_2$），（$2t-3,y_3$）都在对称轴左侧，且 $-1<2t-3<1$.

$\therefore y_1>y_3>y_2$.

4.【解】（1）$\because$ 点 $(2,y_1)$ 在抛物线 $y=x^2+bx$ 上，

$\therefore y_1=4+2b$.

$\because b<-1$，$\therefore 2b<-2$，

$\therefore 4+2b<2$，$\therefore y_1<2$.

（2）该抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{b}{2}$，

①若 $-\dfrac{b}{2}\leqslant -1$，则当 $x=-1$ 时函数取得最小值 -2，即 $1-b=-2$，解得 $b=3$；

②若 $-\dfrac{b}{2}\geqslant 4$，则当 $x=4$ 时函数取得最小值

-2,即 $16+4b=-2$,解得 $b=-\frac{9}{2}$(舍去);

③若 $-1<-\frac{b}{2}<4$,则当 $x=-\frac{b}{2}$ 时函数取得最小值 -2,即 $\frac{b^2}{4}-\frac{b^2}{2}=-2$,

解得 $b=-2\sqrt{2}$ 或 $b=2\sqrt{2}$(舍去).

综上所述,b 的值为 3 或 $-2\sqrt{2}$.

5.【解】(1)当 $m=1$ 时,$y=x^2-2x-2=(x-1)^2-3$,

∴ 此时抛物线的顶点 P 的坐标为 $(1,-3)$.

(2)∵ 抛物线与 y 轴交于点 $C(0,t)$,

∴ $t=m^2-2m-1$.

∵ $t=m^2-2m-1=(m-1)^2-2\geqslant -2$,

∴ t 的取值范围是 $t\geqslant -2$.

(3)抛物线 $y=x^2-2mx+m^2-2m-1$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{-2m}{2\times 1}=m$.

∵ $3m\leqslant x\leqslant m+1$,

∴ $3m\leqslant m+1$,∴ $m\leqslant\frac{1}{2}$.

若 $m\leqslant\frac{3m+m+1}{2}$,即 $m\geqslant -\frac{1}{2}$,则当 $x=m+1$ 时,函数取得最大值 m,

∴ $(m+1)^2-2m(m+1)+m^2-2m-1=m$,

解得 $m=0$;

若 $\frac{3m+m+1}{2}<m$,即 $m<-\frac{1}{2}$,当 $x=3m$ 时,函数取得最大值 m,

∴ $(3m)^2-2m\cdot 3m+m^2-2m-1=m$,

解得 $m=-\frac{1}{4}$(舍去)或 $m=1$(舍去).

综上所述,m 的值为 0.

6.【解】(1)∵ 二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象经过点 $(0,-3)$,$(1,-4)$,

∴ $\begin{cases}c=-3,\\1+b+c=-4,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-2,\\c=-3,\end{cases}$

∴ 二次函数解析式为 $y=x^2-2x-3$,

∴ 对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2\times 1}=1$,

∴ $m=1$.

故答案为 -2,-3,1.

(2)∵ 抛物线 $y=x^2-2x-3$ 开口向上,对称轴为直线 $x=1$,

∴ 在 $-4\leqslant x\leqslant 0$ 的范围内,当 $x=-4$ 时,y 取得最大值,为 $16+8-3=21$;当 $x=0$ 时,y 取得最小值,为 -3.

(3)∵ 抛物线 $y=x^2-2x-3$ 开口向上,对称轴为直线 $x=1$,

∴ 若 $n\leqslant 1$,当 $x=n$ 时,y 取得最小值 $2n$,

即 $y=n^2-2n-3=2n$,

解得 $n=2-\sqrt{7}$ 或 $n=2+\sqrt{7}$(舍去);

若 $n-2\geqslant 1$,当 $x=n-2$ 时,y 取得最小值 $2n$,

即 $y=(n-2)^2-2(n-2)-3=2n$,

解得 $n=4+\sqrt{11}$ 或 $n=4-\sqrt{11}$(舍去);

若 $n-2<1<n$,当 $x=1$ 时,y 取得最小值 $2n$,

即 $y=1-2-3=2n$,

解得 $n=-2$(舍去).

综上所述,n 的值为 $2-\sqrt{7}$ 或 $4+\sqrt{11}$.

7.【解】(1)把 $B(-1,2)$,$C(3,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+3$,

得 $\begin{cases}9a+3b+3=0,\\a-b+3=2,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{1}{2},\end{cases}$

∴ 抛物线的函数解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$.

(2)∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 交 y 轴于点 A,

∴ $A(0,3)$.

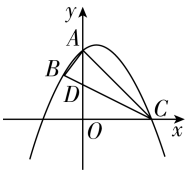
设直线 BC 的解析式为 $y=kx+n(k\neq 0)$,

把 $B(-1,2)$,$C(3,0)$ 代入,得 $\begin{cases}-k+n=2,\\3k+n=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}k=-\frac{1}{2},\\n=\frac{3}{2},\end{cases}$

∴ 直线 BC 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

设 BC 交 y 轴于点 D，如图，



则点 D 的坐标为 $\left(0,\frac{3}{2}\right)$，

∴ $AD=3-\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$，

∴ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}AD(x_C-x_B)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times(3+1)=3$.

(3)∵ 抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+3$，

∴ 抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$.

令点 B 关于对称轴对称的点为 B'，

∴ $B'(2,2)$，∴ $BB'=3$.

∵ 抛物线向左平移 $m(m>0)$ 个单位再次经过点 B，∴ $m=3$.

8.【解】(1) 设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq0)$.

∵ 抛物线对称轴为直线 $x=-1$，

∴ $-\frac{b}{2a}=-1$，即 $b=2a$.

把 $A(-3,0)$，$B(0,6)$ 代入 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 中，得 $\begin{cases}9a-3b+c=0,\\c=6,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}9a-3b+c=0,\\b=2a,\\c=6,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}a=-2,\\b=-4,\\c=6,\end{cases}$

∴ 抛物线解析式为 $y=-2x^2-4x+6$.

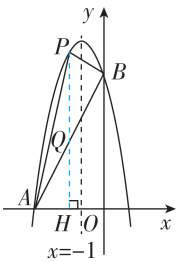
设直线 AB 的解析式为 $y=kx+b'(k\neq0)$.

把 $A(-3,0)$，$B(0,6)$ 代入 $y=kx+b'(k\neq0)$ 中，得 $\begin{cases}-3k+b'=0,\\b'=6,\end{cases}$

∴ $\begin{cases}k=2,\\b'=6,\end{cases}$

∴ 直线 AB 的解析式为 $y=2x+6$.

(2) 如图所示，过点 P 作 $PH\perp x$ 轴于 H，交 AB 于 Q.



设 $P(m,-2m^2-4m+6)$，

则 $Q(m,2m+6)$，

$PQ=-2m^2-4m+6-(2m+6)=-2m^2-6m$，

∴ $S_{\triangle PAB}=\frac{1}{2}\cdot PQ\cdot|x_B-x_A|=\frac{1}{2}\times(-2m^2-6m)\times3=-3m^2-9m=6$.

∴ $m^2+3m+2=0$，

解得 $m=-1$ 或 $m=-2$.

当 $m=-1$ 时，$-2m^2-4m+6=8$；

当 $m=-2$ 时，$-2m^2-4m+6=6$，

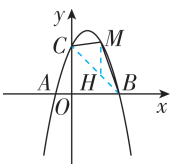
∴ 点 P 的坐标为 $(-1,8)$ 或 $(-2,6)$.

9.【解】(1) 根据题意，抛物线的解析式可表示为 $y=a(x+1)(x-3)$，则 $y=a(x+1)(x-3)=a(x^2-2x-3)=ax^2-2ax-3a$，

∴ $-3a=3$，解得 $a=-1$，

∴ 抛物线解析式为 $y=-x^2+2x+3$.

(2) 连接 BC，过点 M 作 $MH\parallel y$ 轴交 BC 于点 H，如图所示.



设点 $M(x,-x^2+2x+3)$ $(0<x<3)$.

∵ 点 C 为抛物线与 y 轴交点，

∴ $C(0,3)$.

又∵ $B(3,0)$，

∴ 易知直线 BC 解析式为 $y=-x+3$，

∴ 点 $H(x,-x+3)$，

则 $MH=-x^2+2x+3-(-x+3)=-x^2+3x$，

∴ $S_{四边形OCMB}=S_{\triangle CBO}+S_{\triangle BCM}=\frac{1}{2}BO\cdot OC+\frac{1}{2}MH\cdot BO=\frac{1}{2}\times3\times3+\frac{1}{2}\times3\times(-x^2+3x)=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{63}{8}\leqslant\frac{63}{8}$，当 $x=\frac{3}{2}$ 时，$S_{四边形OCMB}=\frac{63}{8}$，$-x^2+2x+3=\frac{15}{4}$，

即四边形 $OCMB$ 的面积的最大值为 $\frac{63}{8}$，此时点 M 的坐标为 $\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.